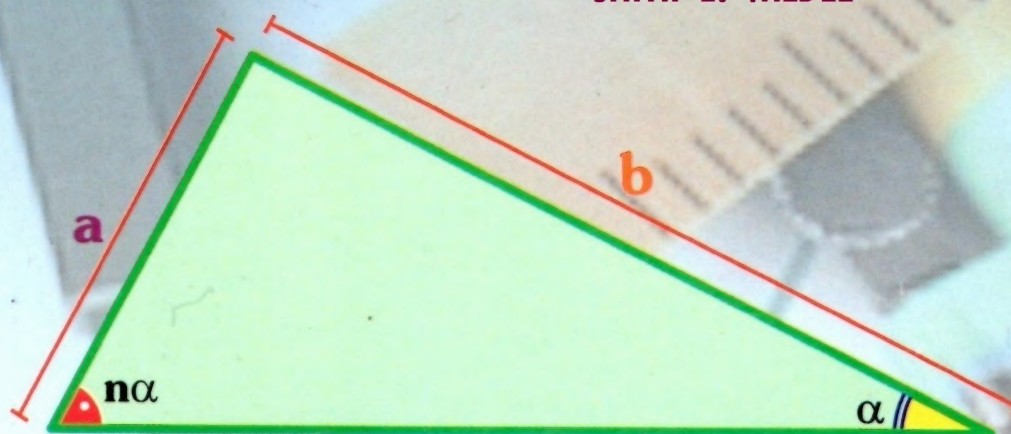


2 GEOMETRÍA TRIÁNGULOS

TEORÍA - DEMOSTRACIONES
TRAZOS AUXILIARES

600 PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

JULIO ORIHUELA BASTIDAS
SMITH E. VALDEZ



En el gráfico, $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$.

Se cumple: $a < b < na$

GEOMETRÍA TRIÁNGULOS

Autor : Julio Orihuela Bastidas

Editor : CUZCANO EDITORIAL E IMPRENTA E.I.R.L.

Composición, diagramación y montaje :

Área de cómputo y publicaciones de Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.

**© CUZCANO EDITORIAL E IMPRENTA E.I.R.L.
Derechos Reservados**

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña

Primera edición : Mayo 2017

Tiraje : 1 000 ejemplares

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2017-05447

Prohibida la reproducción de esta obra por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de la Editorial.

Obra editada, impresa y distribuida por:
CUZCANO EDITORIAL E IMPRENTA E.I.R.L.

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña

Teléfono 423-8154



LIMA - PERÚ

Introducción

El aprendizaje ha sido desde los albores de la humanidad la actividad humana más enriquecedora que ha permitido y garantizado el desarrollo social.

En su afán de comprender y dar solución a los problemas prácticos, el hombre creó un lenguaje artificial como el de las matemáticas que le permitió esclarecer la incognoscible realidad.

Escribir un libro es una labor ardua pero que se reconforta no por los réditos económicos sino por el aporte a la cadena ascendente del conocimiento. Éste no es un texto repetidor de ideas, del cual esta plagado el mercado, sino innovador, verdadero aporte a las ciencias.

He dividido este libro de triángulos en dos partes: teoría y problemas. La primera es un enfoque sobre definiciones, clasificación y teoremas sobre el triángulo, completando en la parte final un artículo breve sobre dobleces; y la parte práctica contiene 600 problemas, divididos en resueltos y propuestos, además se subdividen en problemas tipo anual; que son dirigidos a un ciclo básico estudiantes en proceso de formación; problemas del CEPRE-UNI; que son problemas extraídos de sus distintos ciclos, problemas tipo semestral; que van dirigidos a un público con cierta experiencia; semestral intensivo; que van orientados a afianzar los conocimientos, son problemas de un nivel por encima del examen de admisión; y problemas de repaso, se trata de problemas tipo examen de admisión. Todo ello con el fin de ubicar al estudiante dependiendo del ciclo en el que se encuentra y contribuir de alguna manera a la formación científica del estudiante.

La sugerencia para el lector es intentar previamente los problemas, persistir y ser perseverante. Las soluciones y demostraciones aquí presentadas no son las únicas ni las mejores, solo son sugerencias, como guías para el lector, del cual espero sus observaciones y críticas, las cuales serán bien recibidas.

Julio Orihuela Bastidas

Agradecimiento

- ✓ A mis padres por todo su apoyo, así como a mis hermanos y mis sobrinitos que hacen grato el día a día.
- ✓ A todo el grupo de Editorial Cuzcano, por su confianza y apoyo.
- ✓ A los profesores Luis Saavedra, Renzo Pardo y Jhon Cuya por sus observaciones y sugerencias.
- ✓ A todos mis alumnos y ex alumnos, muchos de ellos ya en la universidad en especial para los alumnos del círculo del colegio Prolog, de selección del Colegio Saco Oliveros y del colegio Von Newman de Huánuco.



Indice

TRIÁNGULOS

Indice

	Pág.
♦ TRIÁNGULOS I	
DEFINICIÓN	7
Regiones asociadas al triángulo	8
- Región triangular	
- Región exterior relativa a un lado	
Ángulo interior y exterior en el triángulo	9
Perímetro de la región triangular	9
Teoremas fundamentales en el Triángulo	10
Teoremas adicionales	12
Generalización de algunos teoremas	16
Teorema de la correspondencia y existencia	17
Clasificación de los triángulos	20
- Según las longitudes de sus lados	
Triángulo escaleno	
Triángulo isósceles	
Triángulo equilátero	
Por las medidas angulares	23
Triángulo rectángulo	
Triángulos oblicuángulos	
- Triángulo acutángulo	
- Triángulo obtusángulo	
Lineas notables asociadas al triángulo	26
Ceviana	
Mediana	
Altura	
Bisectriz	
Bisectriz interior	
Bisectriz exterior	
Mediatriz de un segmento	



Indice

	Pág.
Ángulo entre bisectrices	30
Algunos criterios para realizar trazos auxiliares	37
Teoremas sobre desigualdades en triángulos	40
Poligonal	50
- Poligonal convexa	51
- Envuelta y envolvente	52
Análisis de algunos dobles para obtener líneas notables	58
PROBLEMAS RESUELTOS	61
SOLUCIONARIO	109
PROBLEMAS PROPUESTOS	219
CLAVES	

TRIÁNGULOS

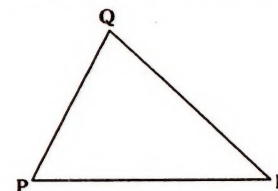
GEOMETRÍA

La geometría es hermosa y algunos de sus teoremas son tan sorprendentes que casi parecen milagrosos. De hecho, el mismo comentario podría hacerse con respecto a toda el área de las Matemáticas, pero la Geometría es única, en el sentido que sus "milagros" son visuales.

J. Martin Isaacs
Geometría Universitaria

DEFINICIÓN⁽¹⁾

Dados tres puntos no colineales, se define el triángulo como la unión de los segmentos de recta cuyos extremos son dichos puntos. A los puntos no colineales se les denominará vértices y a los segmentos, lados del triángulo.



En el gráfico:

P, Q, R: Puntos no colineales

Elementos:

Vértices: P, Q y R

Lados: \overline{PQ} , \overline{QR} y \overline{RP}

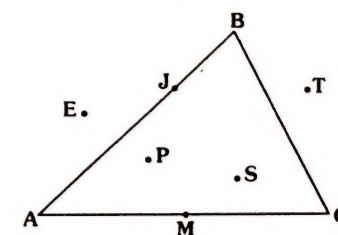
Notación:

ΔPQR : Se lee triángulo de vértices P, Q y R o simplemente triángulo PQR.

Así tenemos:

$$\Delta PQR = \{\overline{PQ} \cup \overline{QR} \cup \overline{RS}\}$$

Observación



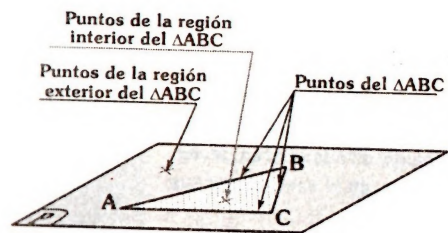
En el gráfico, se tiene el triángulo ABC, podemos afirmar:

- P, S, T y E como no están en los lados, entonces no están en el ΔABC .
- J y M están en los lados AB y AC, entonces, J y M si están en el ΔABC .

(1) ver anexos otros tipos de triángulos.

REGIONES ASOCIADAS AL TRIÁNGULO

Al ubicar un triángulo en el plano, se distinguirán tres conjuntos de puntos: puntos de la región interior, que está conformada por los puntos limitados por el triángulo; puntos del triángulo; y los puntos de la región exterior, que está conformada por los puntos del plano que no están en el triángulo ni en la región interior.

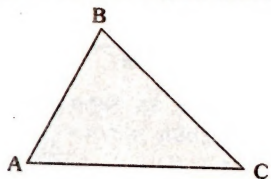


En el gráfico, tenemos el triángulo ABC ubicado en el plano P. Están representadas los conjuntos de puntos.

Nota
Si ubicamos un punto en el plano P, este punto se ubicará en la región interior, en el triángulo o en la región exterior.

REGIÓN TRIANGULAR

Se llama región triangular a la unión de un triángulo con su región interior.



Notación:

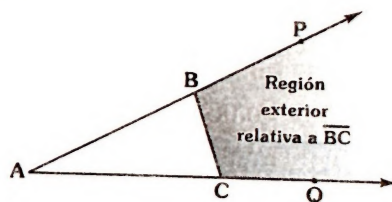
$\triangle ABC$: región triangular ABC.

En el gráfico:

$$\triangle ABC = \{\triangle ABC \cup \{\text{reg. interior}\}\}$$

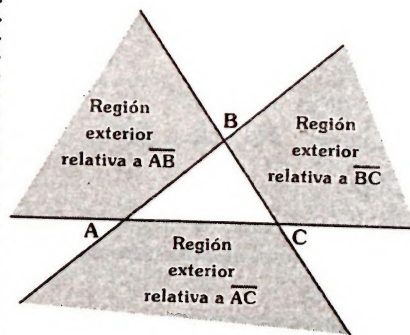
REGIÓN EXTERIOR RELATIVA A UN LADO

Se denominará así a la diferencia de conjuntos de la región interior del ángulo determinado por dos lados y la región triangular.



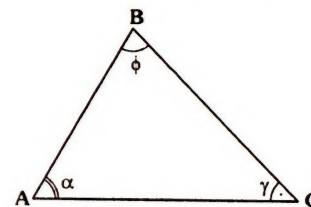
En el gráfico a la región interior del $\angle PAQ$, (que es el determinado por los lados AB y AC), se le ha quitado la región triangular ABC, con lo cual tendremos la región exterior relativa a \overline{BC} , que está representado por la región sombreada.

Así tenemos:



ÁNGULO INTERIOR Y EXTERIOR EN EL TRIÁNGULO

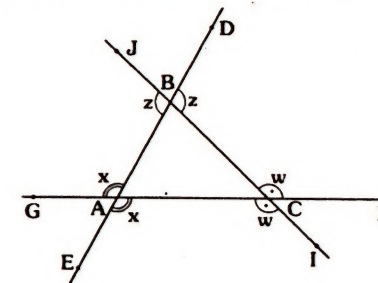
Se llama ángulo interior al ángulo determinado por dos lados del triángulo. El ángulo exterior es el ángulo suplementario y adyacente del ángulo interior.



En el gráfico:

$$\angle ABC, \angle BAC \text{ y } \angle ACB$$

Son los ángulos interiores cuyas medidas son ϕ, α y γ respectivamente.



En el gráfico:

$$\angle GAB, \angle EAC, \angle ACI, \angle FCB, \angle CBD \text{ y } \angle ABJ$$

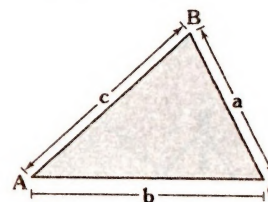
son los ángulos exteriores.

Se puede observar que en cada vértice se determinan dos ángulos exteriores, los cuales son opuestos por el vértice y por teorema son de igual medida.

Así tenemos que las medidas de los ángulos exteriores en el gráfico son x, z y w .

PERÍMETRO DE LA REGIÓN TRIANGULAR

El perímetro⁽²⁾ de una región triangular es la longitud de su contorno, es decir la suma de las longitudes de sus lados.



En el gráfico:

Los lados del triángulo miden a, b y c entonces el perímetro de la región triangular será: $a + b + c$.

(2) ver anexos, se define perímetro de cualquier región plana.

Se representa el perímetro con: $2p$, $2p_{\triangle ABC}$ o con una letra minúscula (ℓ por ejemplo)

Así tenemos:

$$2p_{\triangle ABC} = 2p = \ell = a + b + c$$

De las dos primeras notaciones, tenemos:

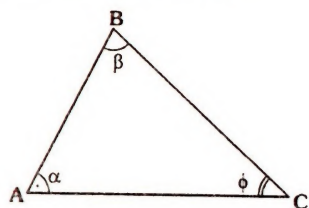
$$p_{\triangle ABC} = p = \frac{a + b + c}{2}$$

el cual representará el semiperímetro de la región triangular ABC.

TEOREMAS FUNDAMENTALES EN EL TRIÁNGULO

TEOREMA 1

La suma de medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180° .

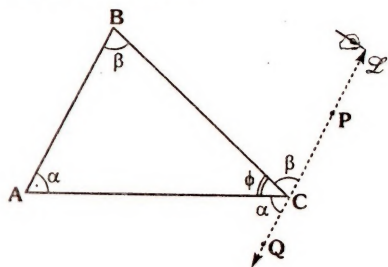


En el gráfico, se cumple:

$$\alpha + \beta + \phi = 180^\circ$$

Demostración

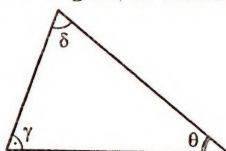
- Usaremos un equivalente al quinto postulado de Euclides⁽³⁾, el cual nos garantiza que por un punto exterior a una recta se puede trazar una recta paralela y solo una a dicha recta.



- Por C trazamos $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, ello está garantizado por el postulado V, de Euclides⁽³⁾.
- Por ángulos alternos internos:
 $m\angle ACQ = \alpha$ y $m\angle BCP = \beta$
- En C, tenemos:
 $\alpha + \phi + \beta = 180^\circ$

Corolario:

La suma de medidas de dos ángulos interiores en el triángulo, es menor que 180° .



En el gráfico, se cumple:

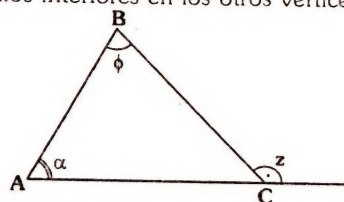
$$\delta + \theta < 180^\circ$$

$$\gamma + \theta < 180^\circ$$

$$\delta + \gamma < 180^\circ$$

TEOREMA 2

La medida de un ángulo exterior en un vértice es igual a la suma de medidas de los ángulos interiores en los otros vértices.

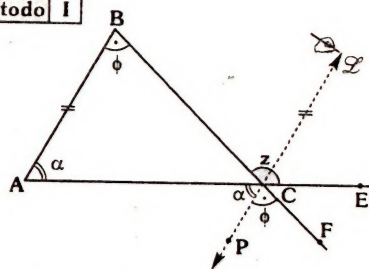


En el gráfico, se cumple:

$$z = \alpha + \phi$$

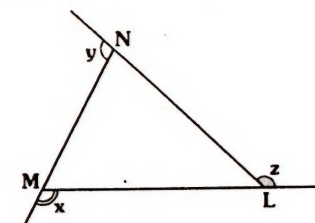
Demostración:

Método I



TEOREMA 3

La suma de las medidas de los ángulos exteriores, considerando uno por cada vértice, es 360° .

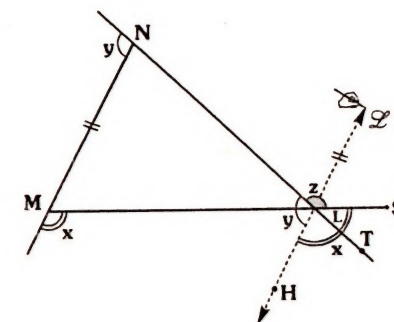


En el gráfico, se cumple:

$$x + y + z = 360^\circ$$

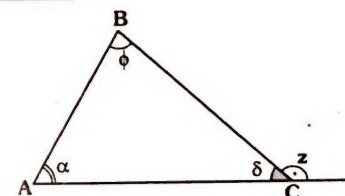
Demostración:

Método I



- Por C, se traza la recta \overleftrightarrow{L} , paralela a \overleftrightarrow{AB} .
- Por ángulos alternos internos:
 $m\angle PCA = \alpha$
- Por ángulos correspondientes:
 $m\angle FCP = \phi$
- Por ángulos opuestos por el vértice:
 $z = \alpha + \phi$

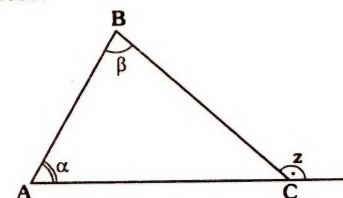
Método II



- Por teorema 1:
 $\alpha + \delta + \phi = 180^\circ \quad \dots (I)$
- Pero:
 $z + \delta = 180^\circ \quad \dots (II)$
- De (I) y (II): $z + \delta = \alpha + \delta + \phi$
 $\therefore z = \alpha + \phi$

Corolario:

La medida del ángulo exterior en un vértice es mayor que la medida de cualquiera de los ángulos interiores en los otros vértices.



En el gráfico, se cumple:

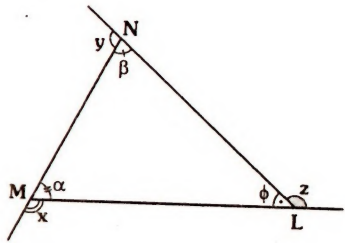
$$z > \alpha$$

$$z > \beta$$

- Por el vértice L, trazamos la recta \overleftrightarrow{L} paralela a \overleftrightarrow{MN} .
- Por ángulos correspondientes:
 $m\angle SLH = x$
 $m\angle HLN = y$
- En L, se puede afirmar:
 $x + y + z = 360^\circ$

(3) En la sección de anexos se da los postulados de Euclides, así como otras posibilidades de la demostración.

Método II



- Por el teorema 2, del cálculo del ángulo exterior:

$$x = \beta + \phi \quad \dots (a)$$

$$y = \alpha + \phi \quad \dots (b)$$

$$z = \alpha + \beta \quad \dots (c)$$

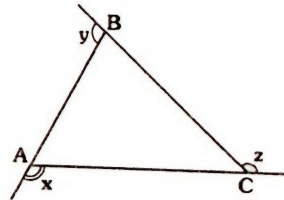
- Sumando (a), (b) y (c):

$$x + y + z = 2(\alpha + \beta + \phi)$$

- Como: $\alpha + \beta + \phi = 180^\circ$
 $\therefore x + y + z = 360^\circ$

Corolario:

La suma de medidas de dos ángulos exteriores (en diferentes vértices) es menor a 360° .



En el gráfico, se cumple:

$$x + y < 360^\circ$$

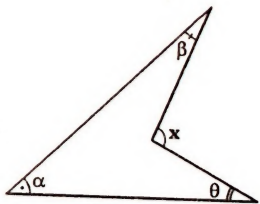
$$y + z < 360^\circ$$

$$z + x < 360^\circ$$

TEOREMAS ADICIONALES

A continuación indicaremos algunas teoremas sobre las relaciones de medidas angulares en ciertas figuras, dichos teoremas se deducen de los teoremas fundamentales. Por su uso frecuente en la resolución de ejercicios, es importante conocerlas. En algunos casos se generaliza.

TEOREMA 4

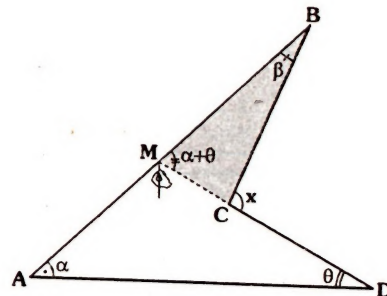


En el gráfico, se cumple:

$$x = \alpha + \beta + \theta$$

Demostración:

Método I



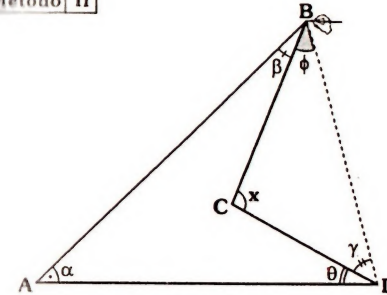
- Se prolonga \overline{DC} hasta que corte a \overline{AB} en M.

- Por teorema (medida del \angle exterior)

$$\Delta AMD : m\angle BMC = \alpha + \theta$$

$$\Delta CMB : x = \alpha + \theta + \beta$$

Método II



- Se traza \overline{BD} .

- Por teorema 1:

$$\Delta BCD : x + \phi + \gamma = 180^\circ \quad \dots (I)$$

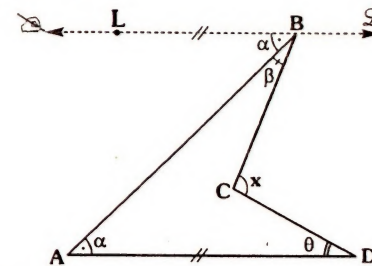
$$\Delta ABD : \alpha + \beta + \phi + \gamma + \theta = 180^\circ \quad \dots (II)$$

- De (I) y (II):

$$x + \phi + \gamma = \alpha + \beta + \phi + \gamma + \theta$$

$$\therefore x = \alpha + \beta + \theta$$

Método III

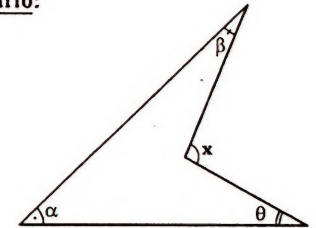


- Por B trazamos la recta \angle paralela a \overline{AD} .

- Por \angle s alternos internos: $m\angle LBA = \alpha$

- Por teorema sobre paralelas:
 $x = \alpha + \beta + \theta$

Corolario:



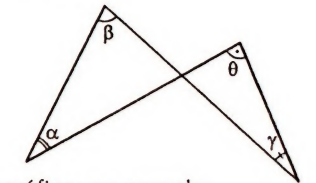
En el gráfico, se cumple:

$$x > \alpha; x > \beta; x > \theta$$

También:

$$x > \theta + \beta; x > \beta + \alpha; x > \theta + \alpha$$

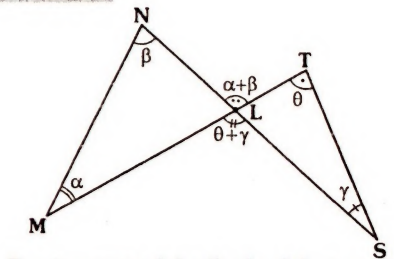
TEOREMA 5



En el gráfico, se cumple:

$$\alpha + \beta = \theta + \gamma$$

Demostración:



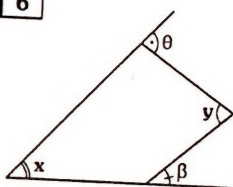
- Por teorema del cálculo del \angle exterior:

$$\Delta MNL : m\angle NLT = \alpha + \beta$$

$$\Delta LTS : m\angle MLS = \theta + \gamma$$

- Por \angle opuestos por el vértice:
 $\alpha + \beta = \theta + \gamma$

TEOREMA 6

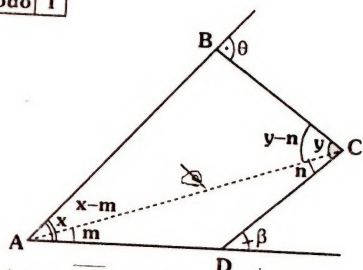


En el gráfico, se cumple:

$$x + y = \theta + \beta$$

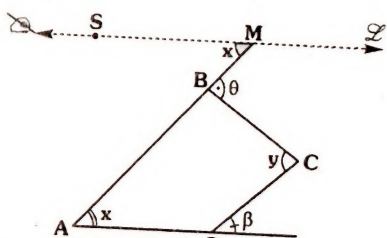
Demostración

Método I



- Se traza \overline{AC} , por teorema del estudio del \angle exterior
- $\triangle ACD: m + n = \beta \dots (I)$
- $\triangle ABC: x - m + y - n = \theta \dots (II)$
- Sumando (I) y (II): $x + y = \theta + \beta$

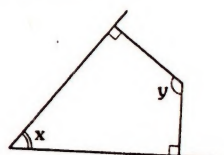
Método II



- Por M (que se ubica en la prolongación de \overline{AB}), se traza $\overline{MS} \parallel \overline{AD}$.
- Por \angle s alternos internos: $m\angle AMS = x$
- Por teorema de ángulos entre paralelas: $x + y = \theta + \beta$

Corolario 1:

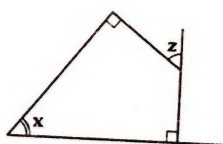
Del gráfico anterior, si $\theta = \beta = 90^\circ$, la nueva figura quedará así:



Se cumple:

$$x + y = 180^\circ$$

Corolario 2:

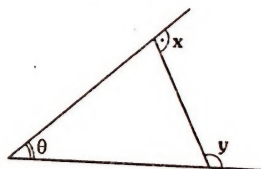


Se cumple:

$$x = z$$

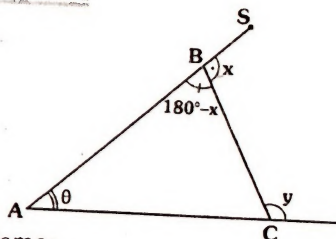
TEOREMA 7

En el gráfico, se cumple:



$$x + y = 180^\circ + \theta$$

Demostración:



- Como:
- $m\angle SBC = x \Rightarrow m\angle ABC = 180^\circ - x$

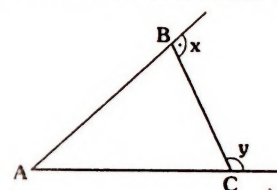
Por teorema del cálculo del \angle exterior:

$$y = \theta + 180^\circ - x$$

$$\therefore x + y = 180^\circ + \theta$$

Corolario:

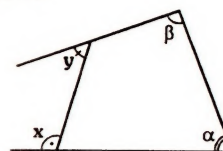
De lo anterior se deduce que la suma de medidas de dos ángulos exteriores (uno por vértice) es mayor a 180° , y considerando el corolario del teorema 3.



En el gráfico, se cumple:

$$180^\circ < x + y < 360^\circ$$

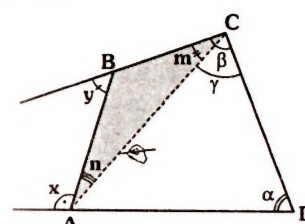
TEOREMA 8



En el gráfico, se cumple:

$$x + y = \alpha + \beta$$

Demostración:



- Se traza \overline{AC} , luego se tiene: $\beta = m + \gamma$
- Por cálculo del ángulo exterior en:

$$\triangle ABC: y = n + m \dots (I)$$

$$\triangle ACD: x + n = \alpha + \gamma \dots (II)$$

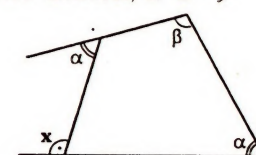
Sumando (I) y (II):

$$x + y = \alpha + \gamma + (m + n)$$

$$\therefore x + y = \alpha + \beta$$

Corolario:

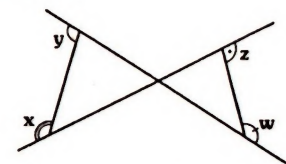
Del gráfico anterior, si $\alpha = \gamma$



Se cumple:

$$x = \beta$$

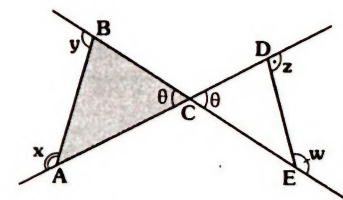
TEOREMA 9



En el gráfico, se cumple:

$$x + y = z + w$$

Demostración



Por teorema 7, en:

$$\triangle ABC: x + y = 180^\circ + \theta$$

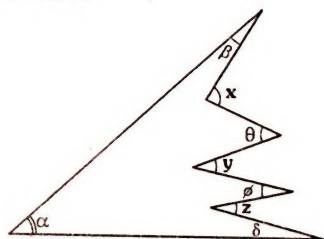
$$\triangle DCE: z + w = 180^\circ + \theta$$

$$\therefore x + y = z + w$$

GENERALIZACIÓN DE ALGUNOS TEOREMAS

Los siguientes teoremas que se indicarán, se desprenden de los teoremas 4, 5 y 6.

TEOREMA 10

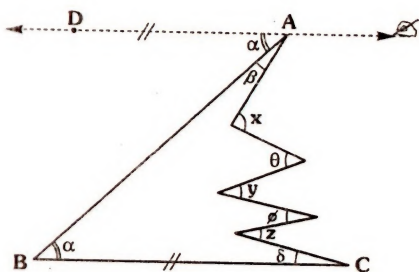


En el gráfico, se cumple:

$$x + y + z = \alpha + \beta + \gamma + \phi + \delta$$

Demostración

Para realizar esta demostración se podría pensar en buscar las figuras indicadas en los teoremas 4 ó 6. Pero optaremos por la siguiente.



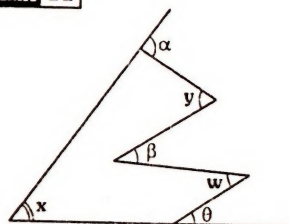
- Se traza por A, la recta paralela a \overline{BC} . Por ángulos alternos internos:

$$m\angle BAD = \alpha$$

- Por teorema de ángulos entre paralelas:

$$x + y + z = \alpha + \beta + \gamma + \phi + \delta$$

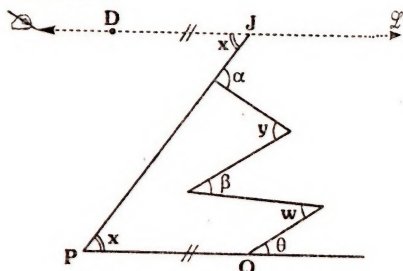
TEOREMA 11



En el gráfico, se cumple:

$$x + y + w = \alpha + \beta + \theta$$

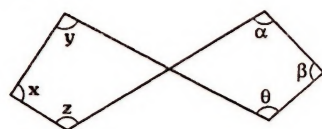
Demostración



- Por J, se traza $\overline{DQ} \parallel \overline{PQ}$.
- Por ángulos alternos internos, se cumple:
 $m\angle DJP = x$
- Por teorema de ángulos entre paralelas:

$$x + y + w = \alpha + \beta + \theta$$

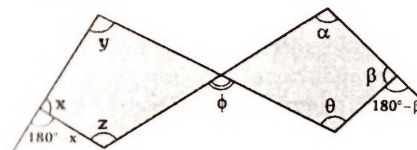
TEOREMA 12



En el gráfico, se cumple:

$$x + y + z = \alpha + \beta + \theta$$

Demostración



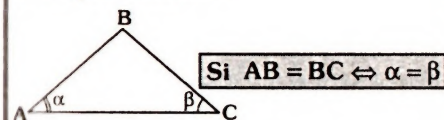
En cada una de las regiones sombreadas, por teorema 6.

TEOREMA DE LA CORRESPONDENCIA Y EXISTENCIA

En esta publicación usaremos el siguiente teorema (sin demostración)

TEOREMA 13

"Si un triángulo tiene dos lados de igual longitud, entonces los ángulos opuestos a dichos lados tienen igual medida y recíprocamente".

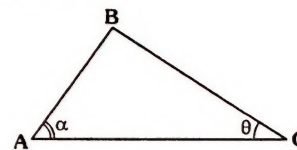


$$\text{Si } AB = BC \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

La demostración se realizará la publicación de congruencia de triángulos.

TEOREMA 14 (teorema de la correspondencia)

En todo triángulo al lado de mayor longitud se opone el ángulo de mayor medida y recíprocamente.



En el gráfico:

$$\text{Si } BC > AB \Leftrightarrow \alpha > \theta$$

- $y + z = \phi + 180^\circ - x$
 $\Rightarrow y + z + x = \phi + 180^\circ \dots (I)$
- $\alpha + \theta = \phi + 180^\circ - \beta$
 $\Rightarrow \alpha + \theta + \beta = \phi + 180^\circ \dots (II)$

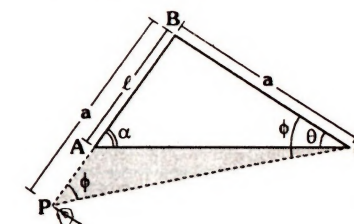
De (I) y (II): $x + y + z = \alpha + \theta + \beta$

Demostración:

Debido al carácter recíproco la demostración constará de dos partes:

Parte I

- Si $BC > AB \Rightarrow \alpha > \theta$



- Como por condición $BC > AB$, es decir $a > \ell$, se prolonga \overline{BA} hasta P, tal que $PB = a$.
- En $\triangle PBC$, como $PB = BC$, por teorema 13:

$$m\angle BPC = m\angle BCP = \phi$$

- Con lo cual tendremos:

$$\phi > \theta \dots (I)$$

- En $\triangle APC$ por corolario del teorema del \angle exterior:

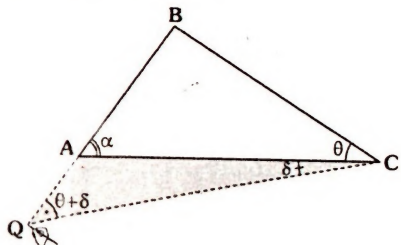
$$\alpha > \phi \dots (II)$$

- De (II), y (I):

$$\alpha > \phi \text{ y } \phi > \theta \Rightarrow \alpha > \theta$$

Parte II (\Leftarrow)

- Si $\alpha > \theta \Rightarrow BC > AB$



- Como $\alpha > \theta \Rightarrow \alpha = \theta + 2\delta$
(Se ha considerado convenientemente 2δ)
- Se prolonga BA hasta Q, tal que $m\angle ACQ = \delta$
- En $\triangle AQC$, por ángulo exterior:

$$\alpha = \delta + m\angle AQC$$

$$\theta + 2\delta = \delta + m\angle AQC$$

$$\Rightarrow m\angle AQC = \theta + \delta$$

- Como:

$$m\angle BQC = m\angle ACB = \theta + \delta$$

- Por teorema 13:

$$QB = BC$$

- Pero:

$$QB = QA + AB$$

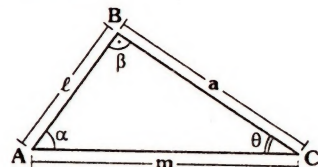
$$\Rightarrow BC = QA + AB$$

$$\therefore BC > AB$$



Observación

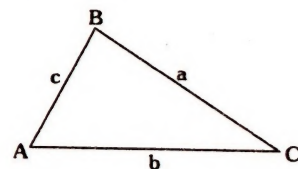
Con lo anterior queda probado que a mayor "lado", se opone mayor "ángulo", para los tres lados y ángulos quedará así:



$$\text{Si } a > m > \ell \Leftrightarrow \alpha > \beta > \theta$$

TEOREMA 15

En todo triángulo la longitud de cualquier lado es menor que la suma de longitudes de los otros dos lados.



En el gráfico, se cumple:

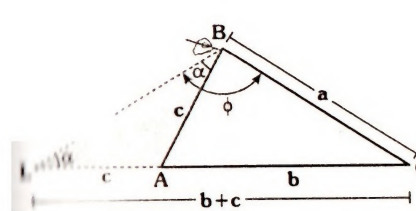
$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

$$c < a + b$$

Demostración

- Será suficiente demostrar para uno de los lados, ya que en forma análoga se demostrará para los otros dos.



- Se prolonga CA hasta L, tal que $AL = c$, entonces $LC = b + c$

- Como:

$$AL = AB \Rightarrow m\angle ALB = m\angle ABL = \alpha$$

- En $\triangle LBC$, se tiene:

$$\phi > \alpha$$

- Por teorema de la correspondencia:

$$b + c > a$$

$$\Rightarrow a < b + c$$

- Con el mismo criterio se prueba:

$$b < a + c \text{ y}$$

$$c < a + b$$

- De donde se tiene:

$$b - c < a \text{ y}$$

$$c - b < a$$

- Es decir:

$$|b - c| < a$$

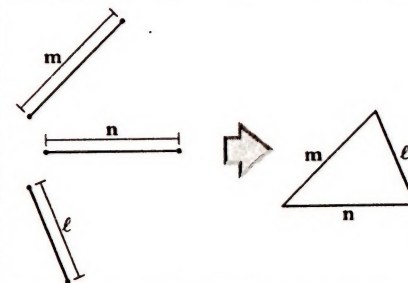
- En la resolución de ejercicios se suele plantear para uno de los lados por ejemplo, el lado que mide a:

$$|b - c| < a < b + c$$

Cuando se conozca la relación de orden entre b y c se puede obviar el valor absoluto, planteando la diferencia del mayor con el menor.

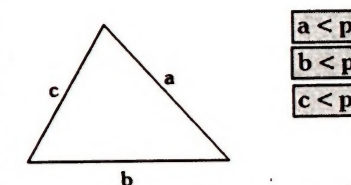
- Dados tres segmentos de longitudes m, n y ℓ , para que se pueda formar con ellos en triángulo, deben cumplir:

$$m < n + \ell, \quad n < m + \ell \text{ y } \ell < m + n$$



Corolario

Del teorema de existencia se deduce:



$$\text{Donde: } p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\text{Prueba: } a < b + c \Rightarrow 2a < \frac{a + b + c}{2} + \frac{a + b + c}{2}$$

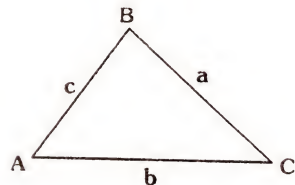
$$\Rightarrow a < p$$

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

SEGÚN LAS LONGITUDES DE SUS LADOS

TRIÁNGULO ESCALENO

Es aquel triángulo que tiene todos sus lados de diferente longitud.



En el gráfico, si el $\triangle ABC$ es escaleno se cumple:

$$a \neq b$$

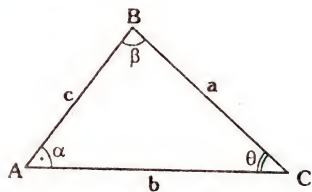
$$b \neq c$$

$$c \neq a$$

TEOREMA 16

Las medidas de los ángulos interiores en un triángulo escaleno son todas diferentes.

Demostración



- Como el $\triangle ABC$ es escaleno, sus lados son todos diferentes, supongamos que estén ordenados así:

$$a > b > c$$

- Por teorema de la correspondencia:

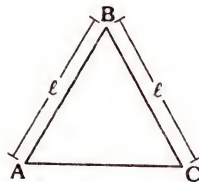
$$\alpha > \beta > \theta$$

- Es decir:

$$\alpha \neq \beta, \beta \neq \theta \text{ y } \alpha \neq \theta$$

TRIÁNGULO ISÓSCELES

Es aquel triángulo que tiene dos lados de igual longitud, al tercer lado se le denomina base.

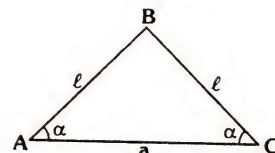


- En el gráfico, el $\triangle ABC$ es isósceles de base AC, se cumple:

$$AB = BC$$

TEOREMA 17

Los ángulos determinados por la base con cada uno de los otros lados son agudos.



- Por teorema 13

- Como $AB = BC \Rightarrow m\angle BAC = m\angle BCA$

- Por corolario del teorema 1:

$$\alpha + \alpha < 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha < 90^\circ$$

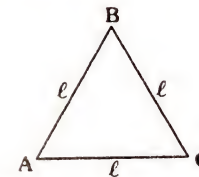
- Es decir $\angle BAC$ y $\angle BCA$ son agudos

- Además, por teorema de existencia

$$a < 2l$$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO

Es aquel triángulo que tiene todos sus lados de igual longitud. También se le llama triángulo regular.



- En el gráfico, si el triángulo es equilátero se cumple:

$$AB = BC = AC$$

TEOREMA 18

Los ángulos interiores de un triángulo equilátero miden 60° .

La demostración es aplicación directa del teorema 13 y 1.



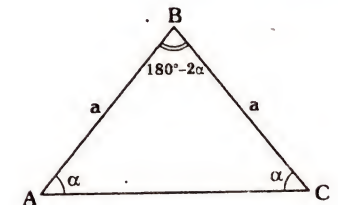
Observaciones

- Si se conoce la medida de uno de los ángulos en un triángulo isósceles se pueden calcular los otros dos.

Si $AB = BC$ y $m\angle BAC = \alpha$

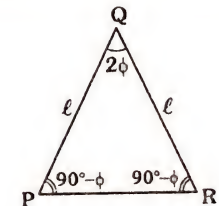
Se cumple: $m\angle ACB = \alpha$

$$m\angle ABC = 180^\circ - 2\alpha$$



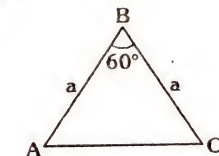
Si $PQ = QR$ y $m\angle PQR = 2\phi$

Se cumple: $m\angle QPR = m\angle QRP = 90^\circ - \phi$



- Si en un triángulo tiene dos lados de igual longitud y un ángulo interior mide 60° , entonces el triángulo es equilátero. Se presentan dos casos:

Caso 1



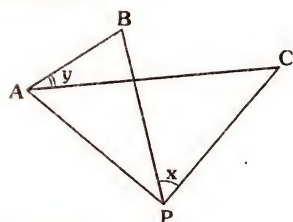
Si $AB = BC$ y $m\angle ABC = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABC$ es equilátero

Caso 2

Si $PQ = QS$ y $m\angle QPS = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle PQS$ es equilátero

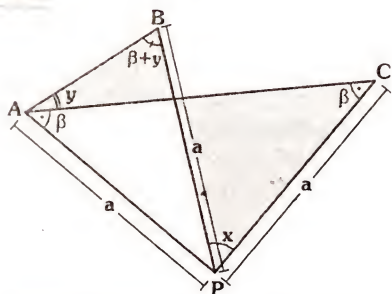
- Esta última observación lo encontraremos en muchos ejercicios, en el capítulo de puntos notables se estudia con más detalle, aquí lo analizaremos desde el tema de triángulos.



Si $PA = PB = PC$
 Se cumple:

$$x = 2y$$

Prueba:

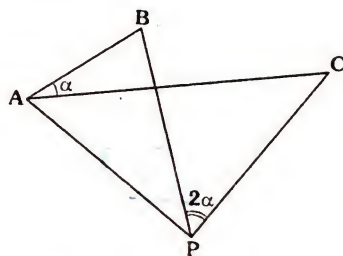


$\triangle PAC$ y $\triangle PAB$: isósceles en la región sombreada.

$$x + \beta = \beta + 2y$$

$$\therefore x = 2y$$

- Recíproco



Si: $PB = PC$ y
 $m\angle BPC = 2(m\angle BAC)$

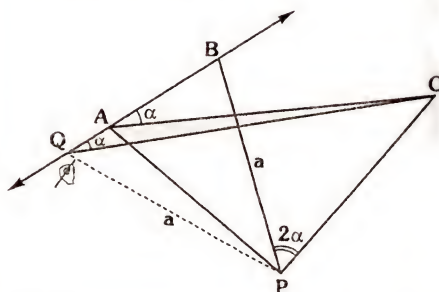
Se cumple: **$PA = PB$**

Prueba:

- Para prueba usaremos el método del absurdo. Desde P se traza PQ tal que $PQ = PB$, donde $Q \in \overline{AB}$ para Q hay dos posibilidades

$Q = A$ o $Q \neq A$

Si $Q \neq A$, se tiene:



Por lo anterior: $m\angle CQA = \alpha$

Se tiene: $m\angle CQA = m\angle CAB$, lo cual es absurdo.

Otra posibilidad es que Q esté entre A y B, lo cual en forma análoga se deduce que es absurdo.

Entonces la única posibilidad es:

$$Q = A$$

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Es aquel triángulo en el que un ángulo interior mide 90° .



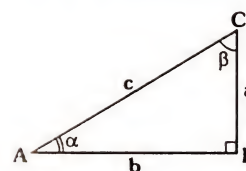
En el gráfico:

$$m\angle ABC = 90^\circ$$

Entonces el triángulo ABC es un triángulo rectángulo.

Catetos: \overline{AB} y \overline{BC}

Hipotenusa: \overline{AC}



En el gráfico se cumple:

Por teorema 1:

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha < 90^\circ \text{ y } \beta < 90^\circ$$

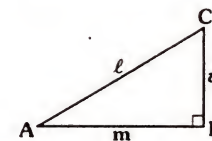
Por teorema de la correspondencia:

$$c > a \text{ y } c > b$$

Nota

Un segundo y último teorema que utilizaremos sin demostración (ella se realizará en el tema de relaciones métricas) es el siguiente.

TEOREMA 19 (Teorema de Pitágoras)



En el gráfico, se cumple:

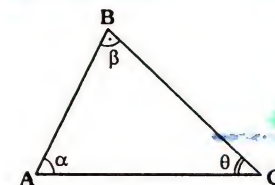
$$a^2 + m^2 = l^2$$

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Es aquel triángulo en el que ningún ángulo interior mide 90° . Debido a esta característica, pueden ser:

1. TRIÁNGULO ACUTÁNGULO

Es aquel triángulo en el que las medidas de sus ángulos interiores son menores a 90° .



- Si $\triangle ABC$ es acutángulo, se cumple:

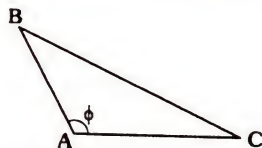
$$\alpha < 90^\circ$$

$$\theta < 90^\circ$$

$$\beta < 90^\circ$$

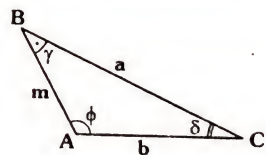
b. TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO

Es aquel triángulo en el que uno de sus ángulos interiores mide más de 90° .



- En el gráfico, si el $\triangle ABC$ es obtusángulo (obtusos en A), se cumple:

$$\phi > 90^\circ$$



En el gráfico si: $\phi > 90^\circ$

$$\Rightarrow \gamma + \delta < 90^\circ$$

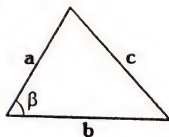
$$\Rightarrow \gamma < 90^\circ \text{ y } \delta < 90^\circ$$

Por teorema de la correspondencia:

$$a > m$$

$$a > b$$

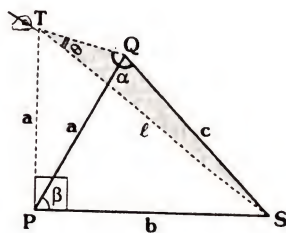
TEOREMA 20



En el gráfico, se cumple:

$$\text{Si: } \beta < 90^\circ \Rightarrow c^2 < a^2 + b^2$$

Demostración



- Se traza $\overline{PT} \perp \overline{PS}$ tal que $PT = a$ y como $\beta < 90^\circ$, \overline{PQ} estará en la parte interna del $\triangle TPS$.

- $\triangle PQT$: isósceles

$$\Rightarrow m\angle QTP = m\angle TPQ \quad \dots (I)$$

- $\triangle TPS$: $\ell^2 = a^2 + b^2$ (T. pitágoras)

- $\triangle TQS$: se tendrá: $\alpha > m\angle TQP$

$$m\angle PTQ > \theta$$

- Por (I), se tendrá $\alpha > \theta$

- Por teorema de la correspondencia

$$\text{Como: } \alpha > \theta \Rightarrow \ell > c$$

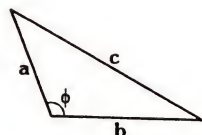
$$\Rightarrow \ell^2 > c^2$$

- Pero en $\triangle TPS$: $\ell^2 = a^2 + b^2$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 > c^2$$

$$\therefore c^2 < a^2 + b^2$$

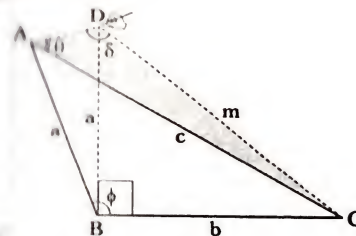
TEOREMA 21



En el gráfico, se cumple:

$$\text{Si } \phi > 90^\circ \Rightarrow c^2 > a^2 + b^2$$

Demostración:



- Se traza $\overline{BD} \perp \overline{BC}$ tal que $BD = a$, como $\phi > 90^\circ$, \overline{BD} cortará a \overline{AC} .

- Como $BD = BA \Rightarrow \triangle ABD$ es isósceles: $m\angle BAD = m\angle ADB$

- En $\triangle DBC$: $m^2 = a^2 + b^2$

- En $\triangle ADC$: $\delta > m\angle ADB$

$$m\angle BAD > \theta \Rightarrow \delta > \theta$$

- Por L. de la correspondencia en $\triangle ADC$:

$$\text{Como } \delta > \theta \Rightarrow c > m$$

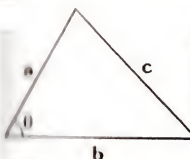
$$\Rightarrow c^2 > m^2$$

- Pero en $\triangle DBC$: $m^2 = a^2 + b^2$

$$\Rightarrow c^2 > a^2 + b^2$$

TEOREMA 22

Consideramos los recíprocos (4) de los dos últimos teoremas.



$$\text{Si: } c^2 < a^2 + b^2 \Rightarrow \theta < 90^\circ$$

$$\text{Si: } c^2 > a^2 + b^2 \Rightarrow \theta > 90^\circ$$

Demostración

- Para realizar la demostración de estos dos teoremas, usaremos el método de reducción al absurdo. Sólo demostraremos el primer teorema, el segundo es análogo.

- Supongamos que no se cumple $\theta < 90^\circ$ con lo cual tendremos:

$$\theta = 90^\circ \quad \text{ó} \quad \theta > 90^\circ$$

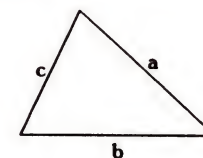
- Si $\theta = 90^\circ \Rightarrow$ por teorema 19 $a^2 + b^2 = c^2$, contradice la condición.

- Si $\theta > 90^\circ \Rightarrow$ por teorema 21 $c^2 > a^2 + b^2$, también contradice la condición.

\therefore Se concluye que $\theta < 90^\circ$

Nota

Con los últimos teoremas demostrados podremos reconocer la naturaleza del triángulo a partir de sus lados.



Si: $a > b$ y $a > c$

Si: $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ es un triángulo rectángulo

Si: $a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ es un triángulo acutángulo

Si: $a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ es un triángulo obtusángulo

(4) ver anexos: métodos de demostración.

LÍNEAS NOTABLES ASOCIADAS AL TRIÁNGULO

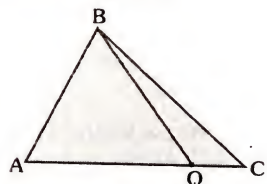
DEFINICIÓN

Son segmentos o rectas (en algunos casos rayos) que se relacionan con los lados o con los ángulos en el triángulo. Las más comunes son:

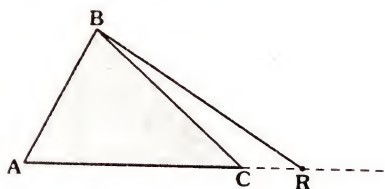
CEVIANA

Es un segmento de recta que tiene como extremos: un vértice del triángulo y el otro es un punto de la recta que contiene al lado opuesto.

- En el gráfico, para $\triangle ABC$
BQ: ceviana interior

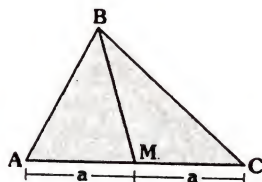


- En el gráfico, para el $\triangle ABC$:
BR: ceviana exterior

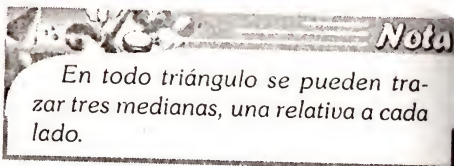


MEDIANA

Es aquel segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el otro es el punto medio del lado opuesto.



- En el gráfico:
BM es una mediana, en este gráfico es la mediana relativa a BC.

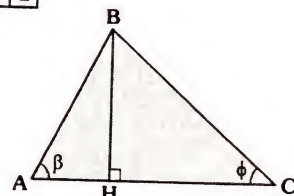


ALTURA

Es aquel segmento de recta, cuyos extremos son un vértice del triángulo y el otro está en la recta que contiene al lado opuesto, tal que dicho segmento es perpendicular al lado.

Se presentan los siguientes casos:

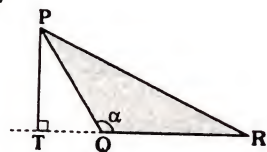
Caso 1



- Si $\beta < 90^\circ$ y $\phi < 90^\circ$
- En el $\triangle ABC$:

BH: altura relativa a AC

Caso 2

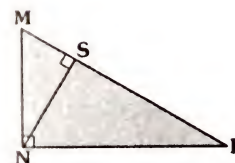


• Si $\alpha = 90^\circ$

• Para el $\triangle PQR$

PT: Altura relativa a QR

Caso 3



• Para el $\triangle MNL$

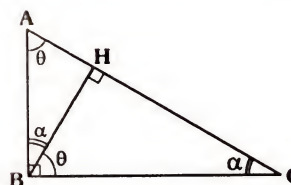
NS: altura relativa a ML

MN: altura relativa a NL

LN: altura relativa a MN

Observación

En un triángulo rectángulo al trazar la altura relativa a la base, se tendrán tres triángulos rectángulos con las mismas medidas angulares.



Se cumple:

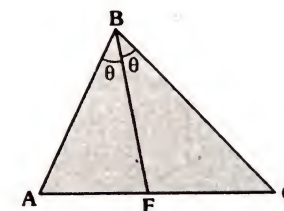
$$m\angle HBC = m\angle BAC = \theta$$

$$m\angle HBA = m\angle BCA = \alpha$$

BISECTRIZ

BISECTRIZ INTERIOR

Es aquella ceviana interior que biseca al ángulo interior.

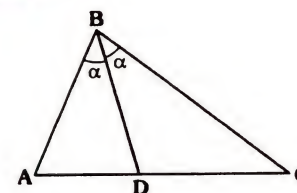


- En el gráfico para el $\triangle ABC$ como:

$$m\angle ABF = m\angle FBC$$

\Rightarrow BF: bisectriz interior relativa a AC.

TEOREMA 23

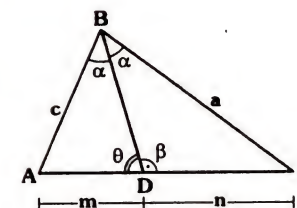


En el gráfico, se cumple:

$$AB > AD$$

$$BC > CD$$

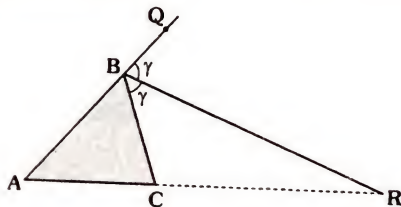
Demostración



- En $\triangle BDC$: $\theta > \alpha$
- Por teorema de la correspondencia en $\triangle ADB$: como $\theta > \alpha \Rightarrow c > m$
- En forma análoga: $\beta > \alpha \Rightarrow a > n$

BISECTRIZ EXTERIOR

Es aquella ceviana exterior que biseca al ángulo exterior.



En el gráfico $m\angle CBR = m\angle RBQ$

$\Rightarrow \overline{BR}$ es bisectriz exterior relativa a \overline{AC} .

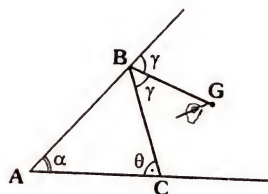
TEOREMA 24

Si dos lados son de diferente longitud, la bisectriz exterior relativa al tercer lado se ubicará en la región exterior relativa al menor de dichos lados y recíprocamente.

Demostración

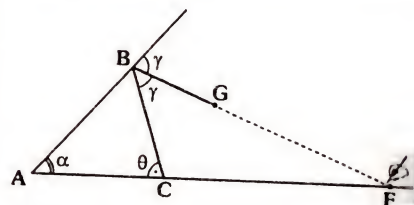
La demostración consta de dos partes, debido al carácter recíproco.

Parte I

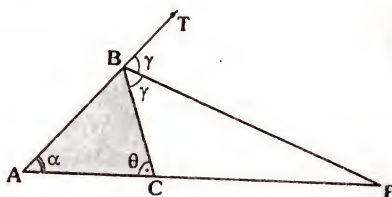


- En el gráfico $AB > BC$, vamos a probar que la prolongación de BG corta a la prolongación de \overline{AC} . Para ello será suficiente probar: $\theta > \gamma$.

- Por \angle exterior: $2\gamma = \alpha + \theta$... (I)
- Como: $AB > BC \Rightarrow \theta > \alpha$
 $\Rightarrow \theta + \theta > \alpha + \theta$... (II)
- De (I) y (II): $2\theta > 2\gamma \Rightarrow \theta > \gamma$
- Como $\theta > \alpha$, las prolongaciones de BC y \overline{AC} se cortan.



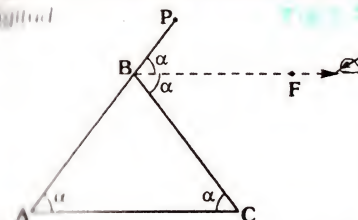
Parte II



- En el gráfico, vamos a demostrar $AB > BC$
- En $\triangle ABF$: $m\angle FBT > \alpha$
Es decir: $\gamma > \alpha$... (I)
- En $\triangle CBF$: $\theta > m\angle CBF$
Es decir: $\theta > \gamma$... (II)
- De (I) y (II): $\theta > \gamma > \alpha$
 $\Rightarrow \theta > \alpha$
- En $\triangle ABC$ por teorema de la correspondencia.
Como: $\theta > \alpha \Rightarrow AB > BC$

Observación

En el triángulo tiene dos lados de igual longitud

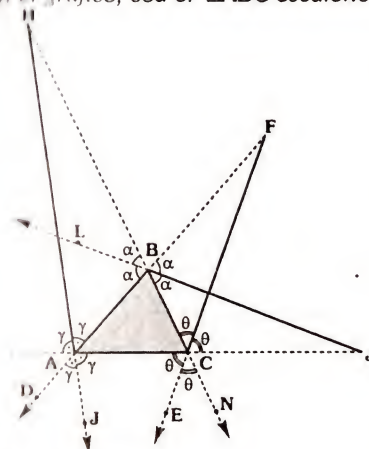


Al $AB = BC \Rightarrow m\angle BAC = m\angle ACB$ al bisecar el ángulo exterior notamos que $BF \parallel AC$.

En este caso diremos que el rayo BF es bisectriz del ángulo PBC .

En un triángulo escaleno observaremos las tres bisectrices exteriores.

En el gráfico, sea el $\triangle ABC$ escaleno.



Sea $AC > AB > BC$

$\Rightarrow \overline{BJ}$, \overline{CF} y \overline{AH} son bisectrices exteriores para el $\triangle ABC$.

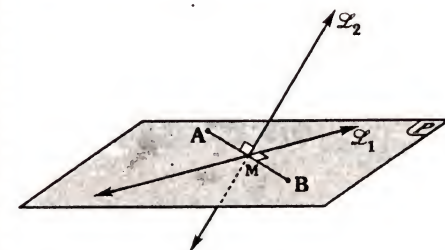
- \overline{AJ} es bisectriz del ángulo $\angle DAC$.
- \overline{CE} es bisectriz del ángulo $\angle ACN$.
- \overline{BL} es bisectriz del ángulo $\angle ABH$.

MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

La mediatriz de un segmento, es la recta perpendicular en su punto medio.

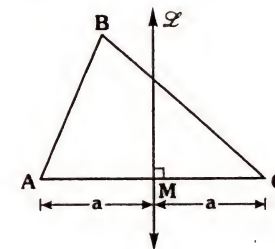
Si consideramos un triángulo, la mediatriz de un lado es la recta coplanar al triángulo y perpendicular en su punto medio.

- Consideremos el segmento (gráfico espacial).



Si $AM = MB$, $\vec{L}_1 \perp \overline{AB}$, $\vec{L}_2 \perp \overline{AB}$ ($M \in \vec{L}_1$ y $M \in \vec{L}_2$), se tendrá \vec{L}_1 y \vec{L}_2 son mediatrices de \overline{AB} .

- Si consideramos el plano que determina el triángulo ABC .



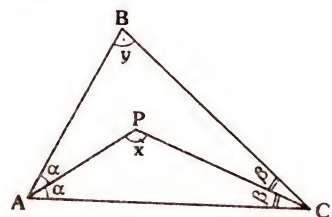
Si: $AM = MC$

$$\vec{L} \perp \overline{AC}$$

$\Rightarrow \vec{L}$ es mediatriz de \overline{AC} .

ÁNGULO ENTRE BISECTRICES

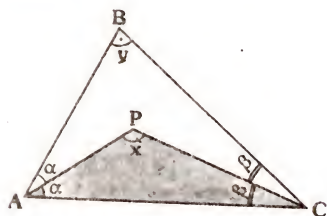
TEOREMA 25



En el gráfico, se cumple:

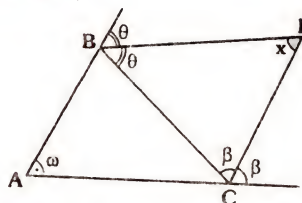
$$x = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$$

Demostración



- En $\triangle ABC$:
 $x + \alpha + \beta = 180^\circ \quad \dots (I)$
- En $\triangle ABP$:
 $x = \alpha + \beta + \gamma \quad \dots (II)$
- Sumando las ecuaciones (I) y (II):
 $2x + \alpha + \beta = 180^\circ + \alpha + \beta + \gamma$
 $2x = 180^\circ + \gamma$
 $\therefore x = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$
- Además:
como $x > 90^\circ \Rightarrow \triangle APC$ es obtusángulo.

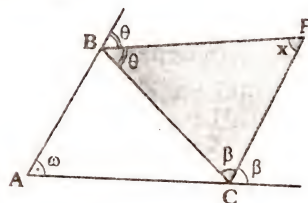
TEOREMA 26



En el gráfico, se cumple:

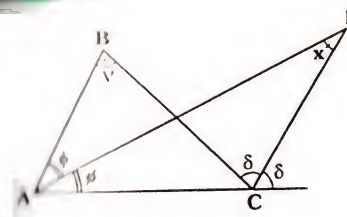
$$x = 90^\circ - \frac{\omega}{2}$$

Demostración



- En $\triangle BFC$: $x + \theta + \beta = 180^\circ \quad \dots (I)$
- En $\triangle A$, por teorema 6:
 $x + \omega = \theta + \beta \quad \dots (II)$
- Sumando (I) y (II):
 $2x + \theta + \beta + \omega = 180^\circ + \theta + \beta$
 $\Rightarrow 2x + \omega = 180^\circ$
 $\therefore x = 90^\circ - \frac{\omega}{2}$
- Además:
Del último resultado: $x < 90^\circ$
Como $2\theta < 180^\circ \Rightarrow \theta < 90^\circ$
 $2\beta < 180^\circ \Rightarrow \beta < 90^\circ$
Se puede asegurar:
 $\triangle BFC$: acutángulo

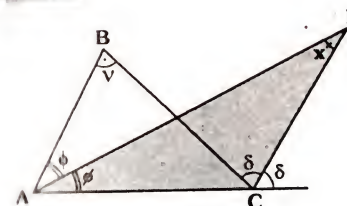
TEOREMA 27



En el gráfico, se cumple:

$$x = \frac{\gamma}{2}$$

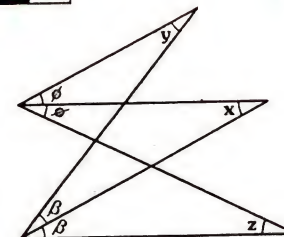
Demostración



- En $\triangle ALC$: $x + \phi = \delta \quad \dots (I)$
- En $\triangle BLC$: $x + \delta = \gamma + \phi \quad \dots (II)$
- Sumando (I) y (II):
 $2x + \phi + \delta = \gamma + \phi + \delta$
 $2x = \gamma$
 $\therefore x = \frac{\gamma}{2}$
- Además:

Como $2\delta < 180^\circ \Rightarrow \delta < 90^\circ$
 $m\angle ACL + \delta = 180^\circ$
 $\Rightarrow m\angle ACL > 90^\circ$
Afirmamos entonces:
 $\triangle ALC$: obtusángulo

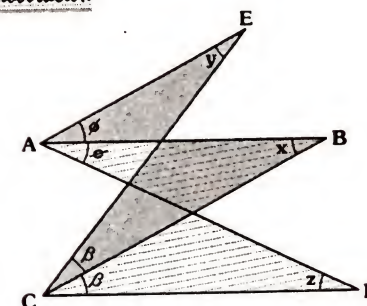
TEOREMA 28



En el gráfico, se cumple:

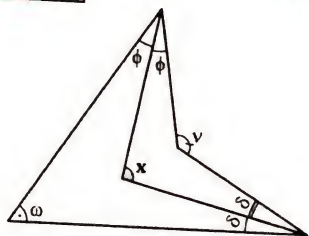
$$x = \frac{\gamma + \delta}{2}$$

Demostración



- Por teorema 5
- En $\triangle ALC$: $x + \beta = \gamma + \phi \quad \dots (I)$
- En $\triangle BLC$: $x + \phi = \gamma + \delta \quad \dots (II)$
- Sumando (I) y (II):
 $2x + \beta + \phi = \gamma + \gamma + \phi + \delta$
 $2x = \gamma + \delta$
 $\therefore x = \frac{\gamma + \delta}{2}$

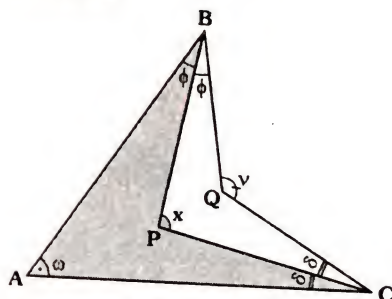
TEOREMA 29



En el gráfico, se cumple:

$$x = \frac{\omega + v}{2}$$

Demostración



- Por el teorema 4

En $\triangle BPC$: $x = \omega + \phi + \delta$... (I)

En $\triangle BQC$: $x + \phi + \delta = v$... (II)

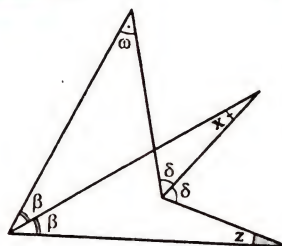
- Sumando (I) y (II):

$$2x + \cancel{\phi + \delta} = \omega + v + \cancel{\phi + \delta}$$

$$\Rightarrow 2x = \omega + v$$

$$\therefore x = \frac{\omega + v}{2}$$

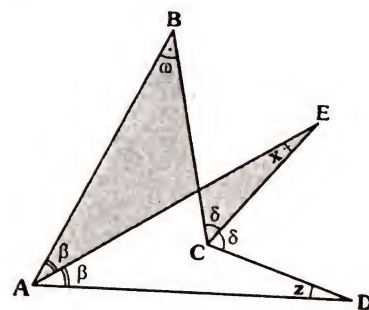
TEOREMA 30



En el gráfico, se cumple:

$$x = \frac{\omega - z}{2}$$

Demostración



En $\triangle BPC$: $x + \delta = \omega + \beta$... (I)

En $\triangle BQC$: $x + \beta + z = \delta$... (II)

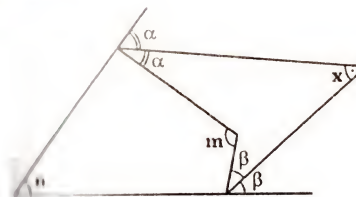
- Sumando (I) y (II):

$$2x + \cancel{\delta + \beta} + z = \omega + \cancel{\delta + \beta}$$

$$\Rightarrow 2x + z = \omega$$

$$\therefore x = \frac{\omega - z}{2}$$

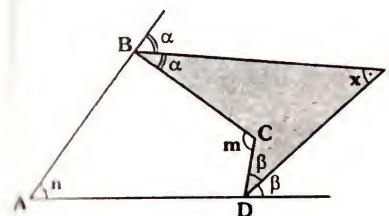
TEOREMA 31



En el gráfico, se cumple:

$$x = \frac{m - n}{2}$$

Demostración



En $\triangle BPC$: $x + \alpha + \beta = m$... (I)

En $\triangle BQC$: $x + n = \alpha + \beta$... (II)

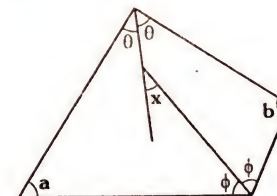
- Sumando (I) y (II):

$$2x + \cancel{\alpha + \beta} + n = m + \cancel{\alpha + \beta}$$

$$2x + n = m$$

$$\therefore x = \frac{m - n}{2}$$

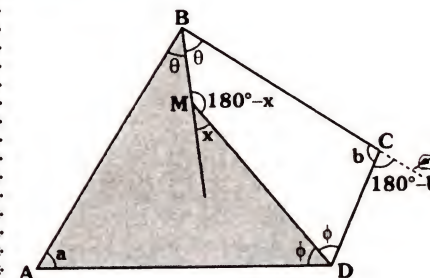
TEOREMA 32



En el gráfico, se cumple:

$$x = \frac{b - a}{2}$$

Demostración



En $\triangle BPC$: $a + \theta + \phi = 180^\circ - x$... (I)

En $\triangle BQC$: $x + 180^\circ - b = \theta + \phi$... (II)

- Sumando (I) y (II):

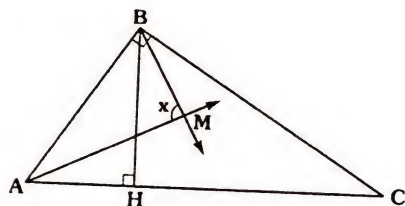
$$a + \cancel{\theta + \phi} + x + 180^\circ - b = 180^\circ - x + \cancel{\theta + \phi}$$

$$\Rightarrow a + x - b = -x$$

$$\Rightarrow 2x = b - a$$

$$\therefore x = \frac{b - a}{2}$$

TEOREMA 33

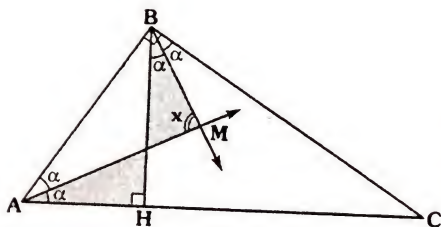


En el gráfico, \overline{AM} y \overline{BM} son bisectrices de los ángulos BAC y HBC respectivamente.

Se cumple:

$$x = 90^\circ$$

Demostración:



- Por la observación en el \triangle , se tiene

$$m\angle BAC = m\angle HBC = 2\alpha$$

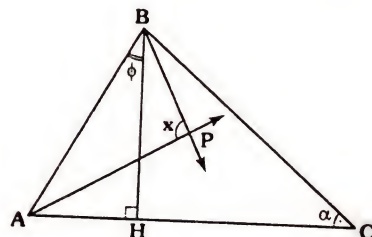
• En $\triangle BHM$:

$$x + \alpha = 90^\circ + \alpha$$

$$\therefore x = 90^\circ$$

TEOREMA 34

El siguiente teorema es una generalización del anterior.

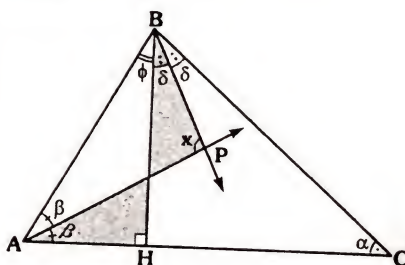


En el gráfico \overline{AP} y \overline{BP} son bisectrices de los ángulos BAC y HBC respectivamente.

Se cumplen:

$$x = 90^\circ + \left(\frac{\alpha - \phi}{2} \right)$$

Demostración:



En $\triangle BHP$: $x + \delta = 90^\circ + \beta$

$$\Rightarrow x = 90^\circ + (\beta - \delta) \quad \dots (I)$$

En $\triangle AHB$ y BHC :

$$\phi + 2\beta = 90^\circ \quad \dots (II)$$

$$\alpha + 2\delta = 90^\circ \quad \dots (III)$$

De (II) y (III):

$$\phi + 2\beta = \alpha + 2\delta$$

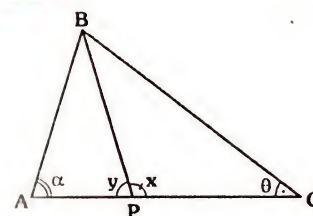
$$2\beta - 2\delta = \alpha - \phi$$

$$\beta - \delta = \frac{\alpha - \phi}{2}$$

En (I): $x = 90^\circ + \left(\frac{\alpha - \phi}{2} \right)$

Si $\alpha = \phi$, entonces el triángulo ABC es triángulo rectángulo.

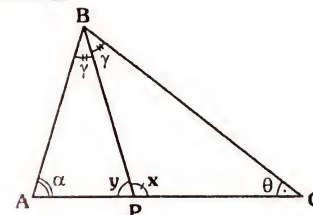
TEOREMA 35



En el gráfico, \overline{BP} es bisectriz interior, se cumple:

$$x - y = \alpha - \theta$$

Demostración



- Por \angle exterior:

$$\text{En } \triangle ABP: x = \alpha + \gamma \quad \dots (I)$$

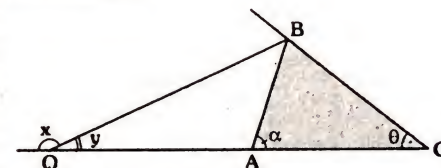
$$\text{En } \triangle BPC: y = \theta + \gamma \quad \dots (II)$$

- Restando (I) y (II):

$$x - y = (\alpha + \gamma) - (\theta + \gamma)$$

$$\therefore x - y = \alpha - \theta$$

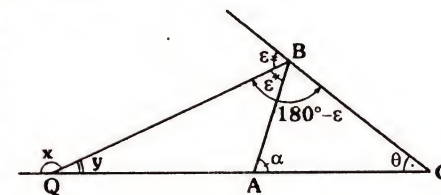
TEOREMA 36



En el gráfico, \overline{BQ} es bisectriz exterior para el $\triangle ABC$, se cumple:

$$x - y = 180^\circ - (\alpha - \theta)$$

Demostración



- Por \angle exterior

$$\text{En } \triangle QBC: x = 180^\circ - \epsilon + \theta \quad \dots (I)$$

$$\text{En } \triangle QBA: y + \epsilon = \alpha \quad \dots (II)$$

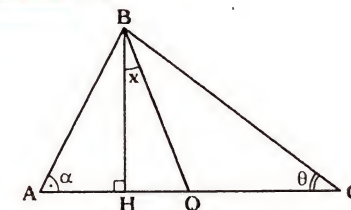
- Restando (I) y (II):

$$x - (y + \epsilon) = 180^\circ - \epsilon + \theta - \alpha$$

$$x - y - \epsilon = 180^\circ - \epsilon - (\theta - \alpha)$$

$$\therefore x - y = 180^\circ - (\theta - \alpha)$$

TEOREMA 37



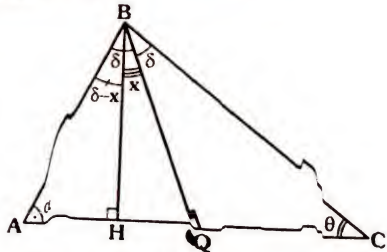
En el gráfico para el $\triangle ABC$

- \overline{BH} : Altura
- \overline{BQ} : Bisectriz interior

Se cumple:

$$x \approx \frac{\alpha - \theta}{2}$$

Demostración



- En $\triangle AHB$ y $\triangle BQC$:

$$\alpha + \delta - x \approx 90^\circ \quad \dots (I)$$

$$\alpha + \delta + \theta \approx 90^\circ \quad \dots (II)$$

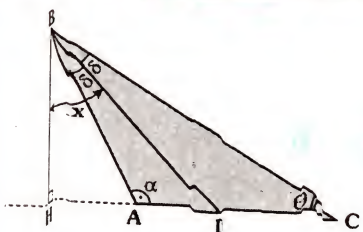
- De (I) y (II):

$$x + \delta + \theta \approx \alpha + \delta - x$$

$$\Rightarrow 2x = \alpha - \theta$$

$$\therefore x = \frac{\alpha - \theta}{2}$$

Observación

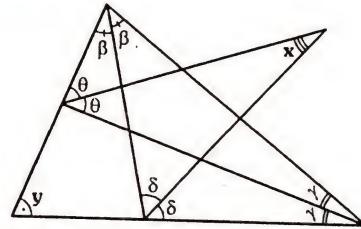


Si $m\angle C > 90^\circ$

Se cumple:

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

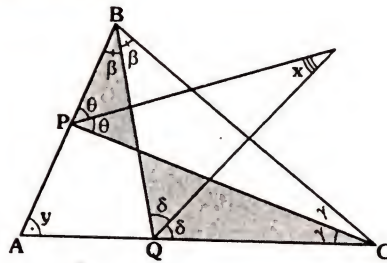
TEOREMA 38



En el gráfico, se cumple:

$$x = 45^\circ - \frac{\gamma}{4}$$

Demostración



- En $\triangle BQC$, por teorema 27

$$x = \frac{\beta + \gamma}{2} \quad \dots (I)$$

- En $\triangle ABC$:

$$2\beta + 2\gamma + \gamma = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\beta + 2\gamma = 180^\circ - \gamma$$

$$\Rightarrow \beta + \gamma = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \quad \dots (II)$$

- De (II) y (I):

$$x = \frac{1}{2} \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right)$$

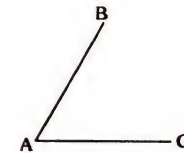
$$\therefore x = 45^\circ - \frac{\gamma}{4}$$

ALGUNOS CRITERIOS PARA REALIZAR TRAZOS AUXILIARES

En la resolución de muchos ejercicios nos encontramos frente a situaciones en las que para su resolución no basta el uso de los teoremas mencionados. Se hace necesario algún trazo auxiliar (como a veces buscar algún triángulo isósceles o equilátero, trazar alguna bisectriz, realizar alguna prolongación, por indicar algunos casos).

En el capítulo de congruencia de triángulo se indicarán otros criterios y teoremas para tal fin. A continuación se consideran algunos criterios, así como reconocer algunos triángulos. El estudiante debe familiarizarse con ellos.

- Si $AB = BC$ y $m\angle BAC = 60^\circ$

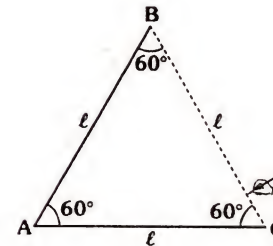


Se te sugiere: trazar \overline{BC} , debido a que:

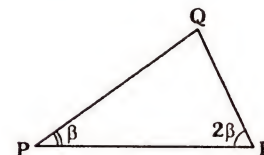
$$m\angle ABC = m\angle ACB = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ es equilátero}$$

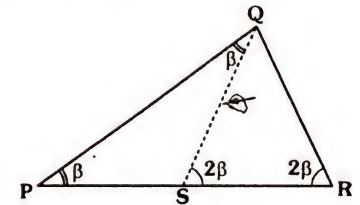
$$\Rightarrow BC = \ell$$



- En el gráfico, si $m\angle PRQ = 2(m\angle QPR)$



Se te sugiere:

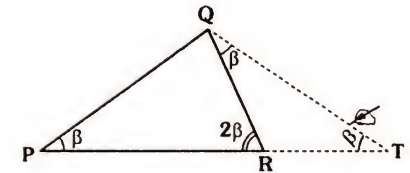


Trazar \overline{QS} , tal que $m\angle PQS = \beta$. Con ello se tendrá:

$$\triangle PSQ \text{ y } \triangle SQR : \text{ isósceles}$$

$$\Rightarrow QR = QS = PS$$

Otra posibilidad



Trazar \overline{QT} (ceviana exterior), tal que $m\angle PTQ = \beta$, ya que se tendrá:

$$m\angle RQT = \beta$$

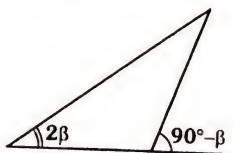
Luego: $\triangle PQT$ y $\triangle RQT$ son isósceles

$$\Rightarrow PQ = QT \text{ y } QR = RT$$

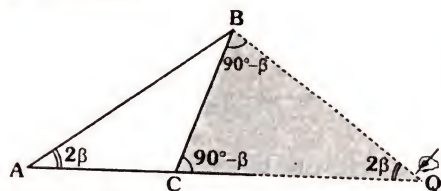
Observación

El primer caso se está considerando $m\angle PQR > \beta$, si no lo fuera entonces, se recomienda usar el segundo caso.

- En el gráfico:



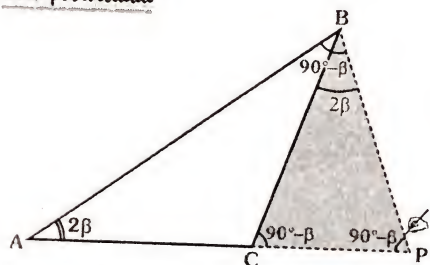
Se te sugiere:



Se traza \overline{BQ} tal que $m\angle AQB = 2\beta$ con ello se tendrá $m\angle CBQ = 90^\circ - \beta$, luego:

$\triangle ABQ$ y $\triangle CBQ$ son isósceles
 $\Rightarrow AB = BQ = CQ$

Otra posibilidad

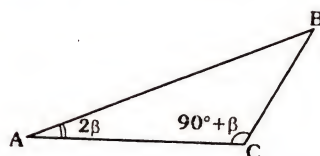


Se traza \overline{BP} tal que $m\angle APB = 90^\circ - \beta$ con ello se tiene: $m\angle ABP = 90^\circ - \beta$, luego:

$\triangle ABP$ y $\triangle CBP$ son isósceles
 $\Rightarrow AB = AP$ y $CB = BP$

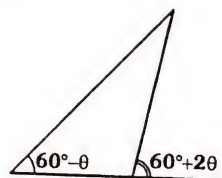
Observación

A veces se podría presentar así:

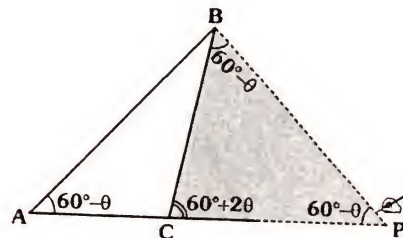


Que sería equivalente a los casos presentados.

- Si se presenta:



Se te sugiere:

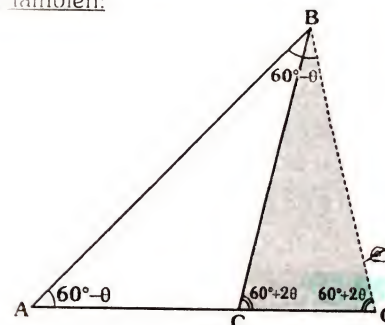


Trazar \overline{BP} tal que $m\angle APB = 60^\circ - \theta$ con ello se tendrá $m\angle CBP = 60^\circ - \theta$

Tendremos entonces:

$\triangle ABP$ y $\triangle CBP$ son isósceles
 $\Rightarrow AB = BP = CP$

O también:



Se puede trazar \overline{BG} tal que:

$$m\angle AGB = 60^\circ + 2\theta$$

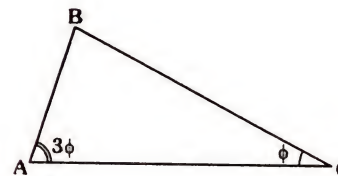
Con lo cual tendremos:

$$m\angle ABG = 60^\circ - \theta$$

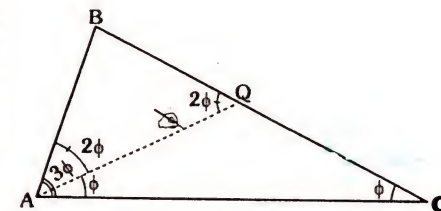
Luego:

$\triangle CBG$ y $\triangle ABG$ son isósceles
 $\Rightarrow AB = AG$ y $CB = BG$

- En el gráfico:



Se te sugiere:



Trazar \overline{AQ} tal que $m\angle QAC = \phi$

Con ello: $m\angle BAQ = 2\phi$

Por \angle exterior: $m\angle BQA = 2\phi$

Se tiene entonces:

$\triangle AQC$ y $\triangle ABQ$ son isósceles
 $\Rightarrow AB = BQ$ y $AQ = QC$

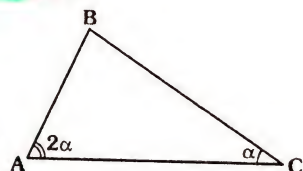
Los criterios indicados no son únicos y también no significa que siempre se van a emplear, solo son sugerencias.
 El lector en la resolución de los ejercicios encontrará sus propios criterios.

TEOREMAS SOBRE DESIGUALDADES EN TRIÁNGULOS

Los teoremas que se muestran a continuación, se demuestran con los teoremas antes mencionados y con algunas propiedades del álgebra que se indicarán.

En otras publicaciones se desarrollarán otras desigualdades geométricas.

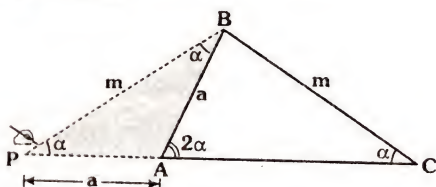
TEOREMA 39



En el gráfico, se cumple:

$$AB < BC < 2(AB)$$

Demostración



- Por T. de la correspondencia (teorema 14)

$$\text{Como: } m \angle BAC > m \angle ACB$$

$$\Rightarrow m > a \quad \dots (I)$$

- Se traza \overline{BP} tal que $m \angle BPA = \alpha$

$$\Rightarrow AP = AB = a$$

$$PB = BC = m$$

- En $\triangle PAB$, por teorema de existencia.

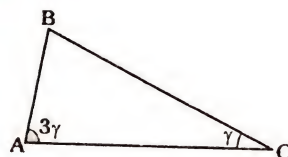
$$m < a + a$$

$$m < 2a \quad \dots (II)$$

- De (I) y (II):

$$a < m < 2a$$

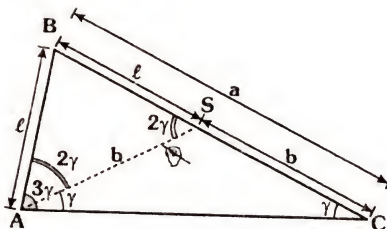
TEOREMA 40



En el gráfico, se cumple:

$$AB < BC < 3(AB)$$

Demostración



- En el gráfico se traza \overline{AS} tal que $m \angle CAS = \gamma \Rightarrow \triangle ACS$ y $\triangle ABS$ son isósceles

$$\Rightarrow AB = BS = a$$

$$AS = SC = b$$

- En el $\triangle ABC$ por t. de la correspondencia como:

$$\text{Como: } m \angle BAC > m \angle ACB \Rightarrow a > b \quad \dots (I)$$

- En $\triangle ABS$ por t. de existencia:

$$b < a + a$$

$$b < 2a$$

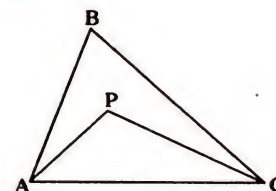
$$\Rightarrow b + b < 2a + b$$

$$\text{Como } b + a = a \Rightarrow a < 3b \quad \dots (II)$$

- De (I) y (II):

$$b < a < 3b$$

TEOREMA 41

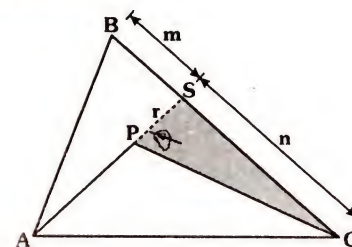


En el gráfico:

P: punto interior de $\triangle ABC$ se cumple:

$$AP + PC < AB + BC$$

Demostración



- Se prolonga a \overline{AP} hasta que corte a \overline{BC} en S.

- Por teorema de existencia:

$$\text{En } \triangle ABS: AP + r < AB + m \quad \dots (I)$$

$$\text{En } \triangle PSC: PC < r + n \quad \dots (II)$$

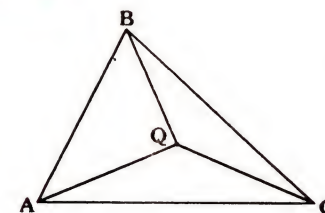
- Sumando (I) y (II):

$$AP + PC + r < AB + r + (m + n)$$

- Como: $BC = m + n$

$$\Rightarrow AP + PC < AB + BC$$

TEOREMA 42



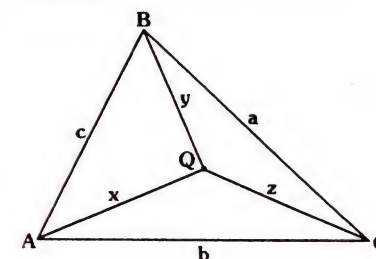
En el gráfico:

Q es un punto en la región interior del $\triangle ABC$ y $2p = AB + BC + AC$

Se cumple:

$$p < QA + QB + QC < 2p$$

Demostración



- Tenemos $2p = a + b + c$

- Por teorema de existencia:

$$\text{En } \triangle BQC: a < y + z \quad \dots (I)$$

$$\text{En } \triangle AQC: b < x + z \quad \dots (II)$$

$$\text{En } \triangle AQB: c < x + y \quad \dots (III)$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$\begin{aligned} a+b+c &< 2(x+y+z) \\ \Rightarrow 2p &< 2(x+y+z) \\ \Rightarrow p &< x+y+z \quad \dots (IV) \end{aligned}$$

- Por teorema 41:

$$\text{En } : x+z < a+c \quad \dots (V)$$

$$\text{En } : x+y < a+b \quad \dots (VI)$$

$$\text{En } : y+z < b+c \quad \dots (VII)$$

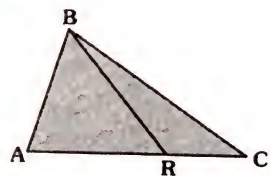
- Sumando (V), (VI) y (VII), se tiene:

$$\begin{aligned} \angle(x+y+z) &< \angle(a+b+c) \\ \Rightarrow x+y+z &< a+b+c \\ \Rightarrow x+y+z &< 2p \quad \dots (VIII) \end{aligned}$$

- De (IV) y (VIII):

$$p < x+y+z < 2p$$

TEOREMA 43



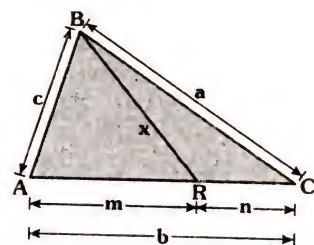
En el gráfico:

Sea p : semiperímetro de $\triangle ABC$

Se cumple:

$$p - AC < BR < p$$

Demostración



$$\bullet \text{ Sea: } 2p = a+b+c \quad \dots (\alpha)$$

- Por teorema de existencia:

$$\text{En } \triangle BRC: x < a+n \quad \dots (I)$$

$$\text{En } \triangle ABR: x < c+m \quad \dots (II)$$

- Sumando (I) y (II):

$$2x < a+c+m+n$$

$$\bullet \text{ Como: } m+n=b \Rightarrow 2x < a+c+b$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ De } (\alpha): \quad &\Rightarrow 2x < 2p \\ &\Rightarrow x < p \quad \dots (III) \end{aligned}$$

$$\text{En } \triangle ABR: c < m+x \quad \dots (I)$$

$$\text{En } \triangle BRC: a < n+x \quad \dots (V)$$

- Sumando (I) y (V):

$$a+c < m+n+2x$$

$$\bullet \text{ Como } m+n=b \Rightarrow a+c < b+2x$$

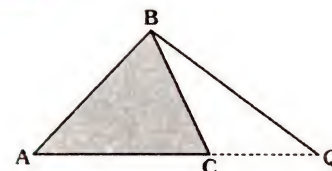
$$\begin{aligned} \Rightarrow a+c+b &< 2b+2x \\ 2p &< 2b+2x \\ \Rightarrow p-b &< x \quad \dots (VI) \end{aligned}$$

- De (III) y (VI):

$$p-b < x < p$$

El último teorema nos da las condiciones para reconocer a una ceviana interior relativa a un lado.

TEOREMA 44



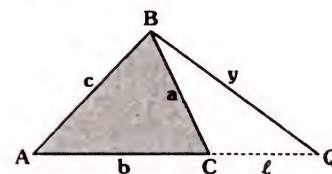
En el gráfico

p : semiperímetro de ABC

Se cumple:

$$BQ > p - AB$$

Demostración



$$\bullet \text{ Se tiene } a+b+c=2p$$

- Por teorema de existencia

$$\text{En } \triangle BCQ: a < y+l \quad \dots (\gamma)$$

$$\text{En } \triangle ABQ: b+l < c+y \quad \dots (\alpha)$$

- Sumando (I) y (II):

$$a+b+l < 2y+c+l$$

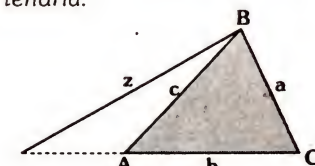
$$\Rightarrow a+b < 2y+c$$

$$a+b+c < 2y+2c$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Como } a+b+c &= 2p \\ \Rightarrow 2p &< 2y+2c \\ p &< y+c \\ \therefore p-c &< y \end{aligned}$$

Observación

Si la ceviana exterior se encuentra en la región exterior relativa a \overline{AB} , se tendría:

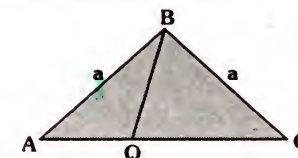


Se demuestra en forma análoga:

$$z > p - a$$

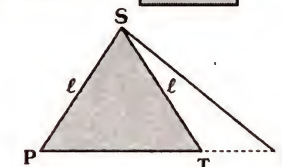
TEOREMA 45

Los siguientes teoremas se demuestran en forma inmediata (por teorema 13, del triángulo isósceles), son casos de la ceviana interior a exterior.



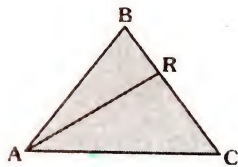
\overline{BQ} : ceviana interior

$$\text{Se cumple: } BQ < a$$



\overline{SH} : ceviana exterior

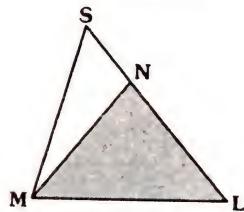
$$\text{Se cumple: } SH > l$$



Si $AB = BC$

\overline{AR} : ceviana interior se cumple:

$$\boxed{AR > RC}$$



Si $MN = NL$

\overline{AS} : ceviana exterior se cumple:

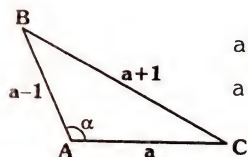
$$\boxed{MS < SL}$$

TEOREMA 46

Existe un sólo triángulo **obtusángulo** de longitudes enteras consecutivas.

Demostración

- Sean las longitudes de los lados: $a-1$, a y $a+1$, se puede observar como " $a+1$ " corresponde al mayor lado se le opone al mayor ángulo.



$a \in \mathbb{N}$ y como:

$$a-1 > 0 \Rightarrow a > 1$$

- Como α es el mayor ángulo $\Rightarrow \alpha > 90^\circ$ por ser triángulo obtusángulo.

- Por teorema de existencia (forma práctica)

$$(a-1) - (a-1) < a < (a+1) + (a-1)$$

$$2 < a < 2a$$

- La desigualdad $a < 2a$ siempre se cumple, lo que aprovechamos aquí es:

$$a > 2 \quad \dots (I)$$

- Como $\alpha > 90^\circ$ y por teorema 21

$$(\alpha + 1)^2 > a^2 + (a-1)^2$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 - (a-1)^2 > a^2$$

- Por identidad de Legendre:

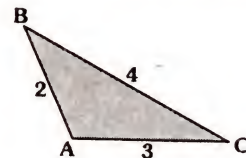
$$4a \cdot 1 < a^2$$

$$\Rightarrow 4 < a \quad \dots (II)$$

- De (I) y (II):

$$2 < a < 4$$

y como " a " es natural $\Rightarrow a = 3$ lo que hace que el triángulo sea único.

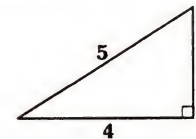


Es el único triángulo obtusángulo de longitudes enteras consecutivos.



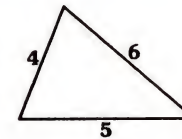
Observación

El único triángulo rectángulo de longitudes enteras consecutivas es:

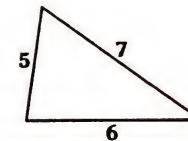


Los demás triángulos de longitudes enteras consecutivas son acutángulos. Si consideramos que los lados midan $a-1$, a y $a+1$, $a > 4$ y $a \in \mathbb{N}$ se tendrán siempre lados de un triángulo acutángulo, por ejemplo:

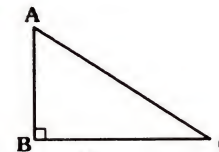
$$a = 5$$



$$a = 6$$



TEOREMA 47

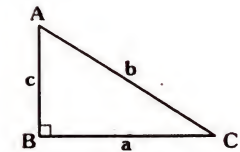


En el gráfico, p es semiperímetro de $\triangle ABC$

Se cumple:

$$\boxed{AC > \frac{2}{3}p}$$

Demostración



- Se tiene $a + b + c = 2p$
Como AC es el mayor lado se tiene:
 $b > a \quad \dots (I)$
 $b > c \quad \dots (II)$

- Sumando (I) y (II):

$$2b > a + c$$

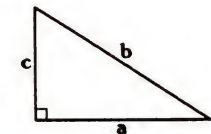
$$\Rightarrow b + 2b > a + c + b$$

- Pero: $2p = a + b + c$

$$\Rightarrow 3b > 2p$$

$$\therefore b > \frac{2}{3}p$$

TEOREMA 48



En el gráfico, se cumple:

$$\boxed{(a+b)^2 \leq 2c^2}$$

Demostración

- Partimos de la desigualdad:

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

- Sumando a ambos miembros: $a^2 + b^2$, tendremos:

$$2(a^2 + b^2) \geq a^2 + b^2 + 2ab$$

- Pero, por teorema de pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\Rightarrow 2c^2 \geq (a+b)^2$$

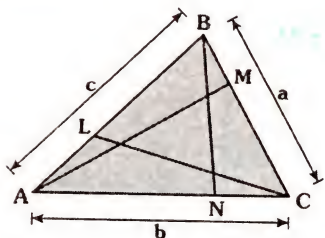
La igualdad se cumple cuando:

$$a = b$$

TEOREMA 49

La suma de longitudes de tres cevianas interiores, trazadas uno por vértice, está comprendido entre el semiperímetro y el triple de dicho semiperímetro.

Demostración



- Sea $2p = a + b + c$
- Por teorema 42

$$p - b < BN < p \quad \dots (I)$$

$$p - a < AM < p \quad \dots (II)$$

$$p - c < CL < p \quad \dots (III)$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$3p - (a + b + c) < BN + AM + CL < 3p$$

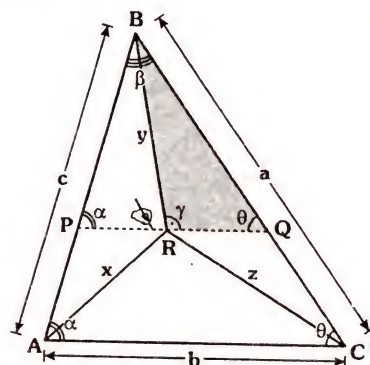
$$3p - 2p < BN + AM + CL < 3p$$

$$\therefore p < BN + AM + CL < 3p$$

TEOREMA 50 (Teorema de Visschers)

En todo triángulo la suma de distancias de un punto interior a sus vértices, es menor que la suma de los dos lados de mayor longitud.

Demostración



- Sea $a \geq c \geq b \Rightarrow \alpha \geq \theta \geq \beta$
Se traza $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$
 $\Rightarrow m\angle BRQ = \alpha, m\angle PQB = \theta$
- En $\triangle RBQ$: como $\gamma > \alpha$ y $\alpha \geq \theta \Rightarrow \gamma > \theta$
 $\Rightarrow \theta < \gamma$, por t. correspondencia:
 $y < BQ \quad \dots (I)$
- Por t. de existencia:
En $\triangle APR$: $x < AP + PR \quad \dots (II)$
En $\triangle RQC$: $z < RQ + QC \quad \dots (III)$
En $\triangle PBQ$: como $\beta \leq \theta$, por teorema de la correspondencia:
 $PQ \leq PB \quad \dots (IV)$

- Sumando (I), (II), (III) y (IV)

$$x + y + z + PQ < (AP + PB) + (BQ + QC) + (PQ + RQ)$$

$$\Rightarrow x + y + z + \cancel{PQ} < c + a + (\cancel{PQ})$$

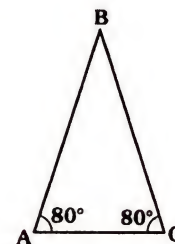
$$\therefore x + y + z < a + c$$

Observación

Si las longitudes de los lados de un triángulo son a, b y c tal que: $a \geq c \geq b$, las distancias hacia los vértices de un punto interior son x, y, z , del teorema 42 y 50, se cumple:

$$\frac{a + b + c}{2} < x + y + z < a + c$$

TEOREMA 51



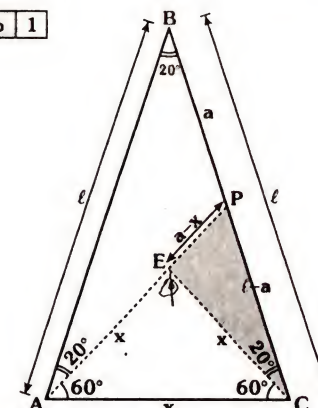
En el gráfico se cumple:

$$2 < \frac{AB}{AC} < 3$$

Demostración

- Como por condición las medidas angulares ya están dadas, significa que la razón $\frac{AB}{AC}$ también está dado, lo que el teorema afirma es que dicha razón se puede acotar. Lo cual se va a demostrar.

Paso 1



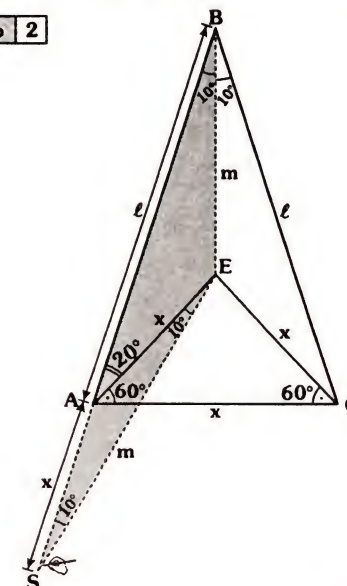
- Se traza interiormente el $\triangle AEC$ equilátero, con ello se tiene: $m\angle EAB = 20^\circ$. Al prolongar \overline{AE} hasta que corte a \overline{BC} en P
 $\Rightarrow \triangle ABP$ isósceles $\Rightarrow AP = PB = a$

- En $\triangle EPC$: Por existencia

$$x < (\ell - a) + (a - x)$$

$$\Rightarrow 2x < \ell \quad \dots (I)$$

Paso 2



- En la prolongación de \overline{BA} se ubica S tal que $AS = x$

$$\Rightarrow \triangle EBS : \text{isósceles}$$

$$\Rightarrow m\angle AES = m\angle ASE = 10^\circ$$

$$\Rightarrow BE = ES = m$$

- Por t. existencia:

$$\triangle AEB : \quad \ell < m + x \quad \dots (\alpha)$$

$$\triangle AES : \quad m < 2x \quad \dots (\beta)$$

$$\Rightarrow m + x < 2x + x$$

De (α) y (β):

$$\ell < m + x < 3x$$

$$\therefore \ell < 3x \quad \dots (\ell)$$

- De (I) y (II): $2x < \ell < 3x$

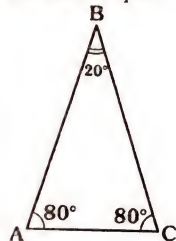
$$\therefore 2 < \frac{\ell}{x} < 3$$

Observación

La demostración del teorema anterior es equivalente a demostrar:

$$2 < \frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ} < 3$$

Debido a que:



Por ley de senos:

$$\frac{\ell}{x} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ}$$

TEOREMA 52

El siguiente teorema se ha incluido en esta publicación pese a que se trata de un gráfico espacial.

Sólo se requiere conocer que un tetraedro es un sólido limitado por cuatro regiones trian-

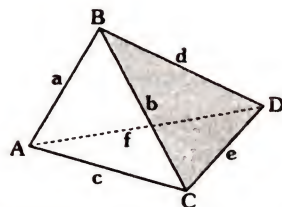
gulares y que los lados se llamarán aristas.

Enunciado del teorema:

"En un tetraedro existe por lo menos un vértice tal que con las aristas concurrentes en él, se puede formar un triángulo".

Demostración

- Consideremos:



- En primer lugar observe los cuatro triángulos: $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle ADB$ y $\triangle ACD$.

- Consideremos también que para el vértice B, con respecto a las aristas: \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{BD} hay dos posibilidades:

i) Si forman un triángulo, con ello ya estaría demostrado.

ii) Si no forman un triángulo se tendrá que el triángulo se formará con las aristas que concurran en A, C o D.

- Analicemos (ii):

Si **no se forma el triángulo**, se cumple entonces:

$$b \geq a + d \quad \dots (I)$$

- Analizando las aristas que concurran en "C".

$$\text{En } \triangle ABD : \quad a + d > f \quad \dots (II)$$

$$\text{De (I) y (II): } b \geq a + d > f$$

$$\Rightarrow b > f \quad \dots (III)$$

- En $\triangle ADC$:

$$e < f + c \quad \dots (IV)$$

$$\text{De (III)} \quad f < b \Rightarrow f + c < b + c \quad \dots (V)$$

De (IV) y (V) se tendrá:

$$e < f + c < b + c$$

$$\Rightarrow \boxed{e < b + c} \quad \dots (\alpha)$$

- En $\triangle ADC$: $c < f + e \quad \dots (VI)$

$$\text{Como } f < b \Rightarrow f + e < b + c \quad \dots (VII)$$

De (VI) y (VII):

$$c < f + e < b + e$$

$$\Rightarrow \boxed{c < b + e} \quad \dots (\beta)$$

- En $\triangle BCD$: $b < d + e \quad \dots (VIII)$

De (I) y (VIII):

$$a + d \leq b < d + e$$

$$\Rightarrow a + d < d + e$$

$$\Rightarrow a < e$$

$$\Rightarrow a + c < e + c \quad \dots (IX)$$

- En $\triangle ABC$: $b < a + c \quad \dots (X)$

De (IX) y (X):

$$b < a + c < e + c$$

$$\Rightarrow \boxed{b < e + c} \quad \dots (\gamma)$$

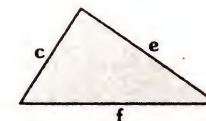
- De (α), (β) y (γ):

$$e < b + c$$

$$c < b + e$$

$$b < e + c$$

- Se concluye que con \overline{CD} , \overline{AD} y \overline{AC} se podrá formar un triángulo.



TEOREMA 53

Dados cinco segmentos, tales que con cualquiera de ellos es posible construir un triángulo se cumple que al menos uno de ellos es acutángulo.

Demostración

- Sean a, b, c, d, y e las longitudes de los segmentos, tales que:

$$a \leq b \leq c \leq d \leq e \quad \dots (I)$$

- Se puede notar que se formarán 10 triángulos (ya que $C_3^5 = 10$), el teorema nos afirma que por lo menos uno de ellos es acutángulo.

- Cada triángulo tiene sólo tres posibilidades; es acutángulo, rectángulo o obtusángulo, los lados se relacionan por la nota indicada en la página 25.

- Consideremos los triángulos de lados (a, b, c) y (c, d, e) si los triángulos fueran acutángulos cumplen:

$$c^2 < a^2 + b^2 \quad \text{y} \quad e^2 < c^2 + d^2$$

- Usaremos el método del absurdo, es decir, **supongamos que no se cumple** lo anterior, es decir:

$$c^2 \geq a^2 + b^2 \quad \text{y} \quad e^2 \geq c^2 + d^2 \quad \dots (\alpha)$$

- Considerando la siguiente desigualdad ⁽⁵⁾:

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \quad \dots (\beta)$$

⁽⁵⁾ ver anexos, desigualdad de la media cuadrática

Como:

$$c^2 \geq a^2 + b^2 \Rightarrow 2c^2 \geq 2(a^2 + b^2) \dots (II)$$

De (β) y (II): $2c^2 \geq (a+b)^2 \dots (III)$

De (α) : $e^2 \geq c^2 + d^2 \dots (IV)$

De (I): $d^2 \geq c^2 \dots (V)$

• Sumando (III), (IV) y (V):

$$e^2 \geq (a+b)^2$$

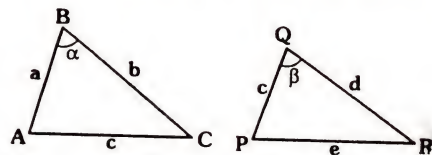
$$\Rightarrow e \geq a+b \dots (VI)$$

Pero con a , b y e es posible formar, se debe cumplir :

$$e < a+b \dots (VII)$$

• (VI) y (VII) son contradictoria, entonces nuestra suposición es falsa, es decir se cumple:

$$c^2 < a^2 + b^2 \text{ o } e^2 < c^2 + d^2$$



• Como " c " es el lado mayor en el $\triangle ABC$ y como:

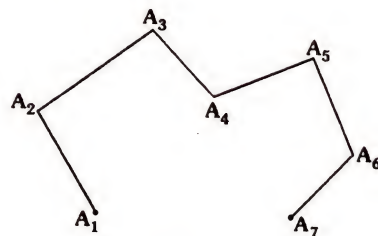
$$c^2 < a^2 + b^2 \Rightarrow \text{el } \triangle ABC$$

es acutángulo para el $\triangle PQR$ ocurre algo análogo.

POLIGONAL

Consideremos en un plano n puntos ($n \geq 3$ y $n \in \mathbb{N}$), tales como $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, se define la poligonal o línea quebrada como la unión de $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$ con las siguientes condiciones:

- Dos segmentos consecutivos no deben estar en la misma recta.
- Los segmentos tengan en común a los extremos.



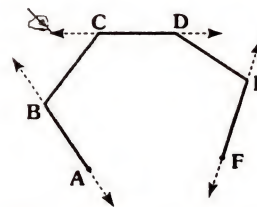
En el gráfico, $n=7$

$$\text{poligonal} = \{\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \overline{A_3A_4} \cup \overline{A_4A_5} \cup \overline{A_5A_6} \cup \overline{A_6A_7}\}$$

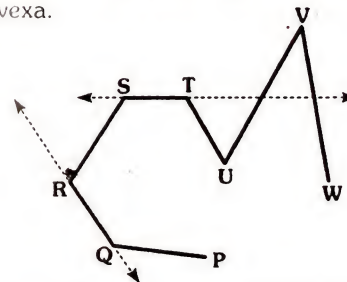
A los segmentos se les denomina lados y a los puntos A_1 y A_7 se les llama extremos.

POLIGONAL CONVEXA

En toda recta que contiene a un lado ubicada a la poligonal en un mismo semiplano, a la poligonal se le llamará convexa.



En el gráfico, ABCDEF es una poligonal convexa.



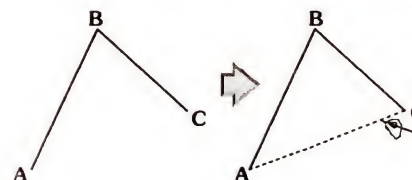
En el gráfico, la poligonal PQRSTUV es no convexa.

TEOREMA 54

En toda poligonal la distancia entre los extremos es menor entre los extremos es menor que la suma de longitudes de todos los lados de la poligonal.

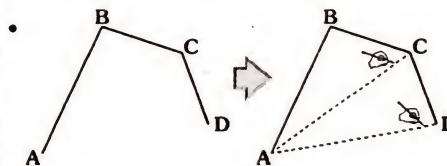
Demostración

• Consideremos las siguientes poligonales.



• Por teorema de existencia:

$$AC < AB + BC$$



En $\triangle ACD$:

$$AD < AC + CD \dots (I)$$

En $\triangle ABC$:

$$AC < AB + BC \dots (II)$$

De (I) y (II):

$$\Rightarrow AD < AB + BC + CD$$

• Se puede ir aumentando lados o extremos demostrando el teorema, pero en realidad no garantizaría la veracidad del teorema. Usaremos para ello el método de inducción.⁽⁶⁾

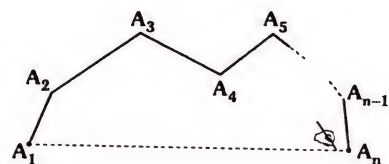
• El método de inducción consta de las siguientes partes:

- Demostrar para el menor valor, para el cual tiene sentido el teorema.
- Supone que el teorema es válida para n , $n \in \mathbb{N}$ (Hipótesis Inductiva).
- Demostrar que se cumple para $n+1$.

• La primera ya fue probado.

• Supongamos que es válida para " n ".

⁽⁶⁾ Sobre el método de inducción, ver anexos.

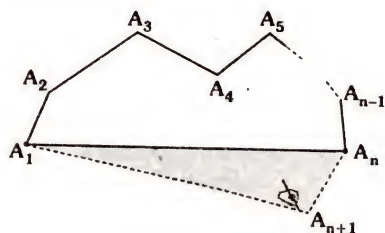


$$A_1 A_n < A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_{n-1} A_n \dots (\alpha)$$

- Demostremos que se cumple para $n+1$.

- Consideremos la poligonal

$$A_1 A_2 A_3 \dots A_n A_{n+1}$$



- El punto A_{n+1} , no debe ser colineal con A_{n-1} y A_n o con $A_1 A_2$ (por definición).

- En $\Delta A_1 A_n A_{n+1}$:

$$A_1 A_{n+1} < A_1 A_n + A_n A_{n+1} \dots (\beta)$$

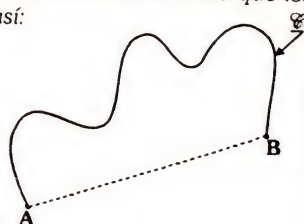
- Sumando (α) y (β) :

$$A_1 A_{n+1} < A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_{n-1} A_n + A_n A_{n+1}$$

Con lo cual queda demostrado el teorema $\forall n \in \mathbb{N} (n \geq 3)$.

Observación

- La demostración es válida para una poligonal convexa y no convexa.
- Si ubicamos, dos puntos en un plano y trazamos la curva que los une así:



ℓ : longitud de la curva \mathcal{C}

Se cumple: $AB < \ell$

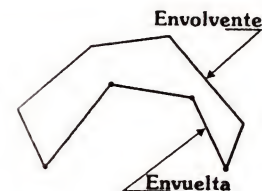
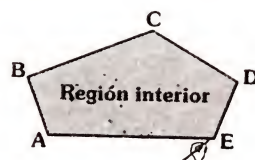
Para demostración de la última afirmación involucra elementos de cálculo superior, pero la mayor parte de la demostración ha sido indicada.

El paso final es definir la longitud de la curva como caso límite de la longitud de la poligonal cuyos vértices están en la curva.

ENVUELTA Y ENVOLVENTE

Si unimos los extremos de una poligonal a la región limitada se le denominará región interior.

Si consideramos ahora dos poligonales con los mismos extremos y una de ellas se ubica en la región interior de la otra, se le denomina envuelta y a la otra envoltente.

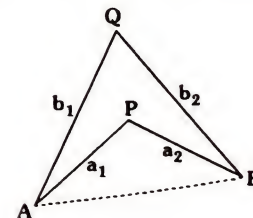


TEOREMA 55

La longitud de toda línea poligonal convexa es menor que la longitud de la poligonal que la envuelve.

Demostración

- Podemos partir, así; que la envuelta y la envoltente tengan igual cantidad de lados.

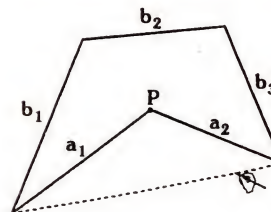


- Lo cual ya fue probado (ver teorema 40)

Se cumple entonces:

$$a_1 + a_2 < b_1 + b_2$$

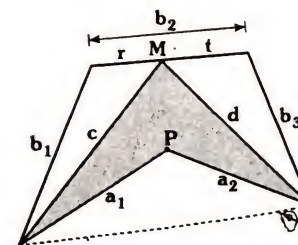
- Podemos hacer una serie de variantes así:



Se cumple:

$$a_1 + a_2 < b_1 + b_2 + b_3$$

Lo cual se prueba de la siguiente forma



$$\text{En } \Delta : a_1 + a_2 < c + d \dots (I)$$

$$\text{En } \Delta AQM : c < b_1 + r \dots (II)$$

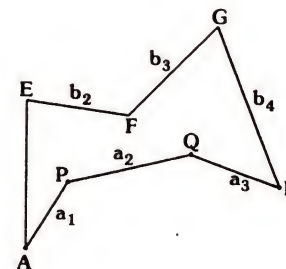
$$\text{En } \Delta MRB : d < b_3 + t \dots (III)$$

Sumando (I), (II) y (III):

$$a_1 + a_2 + c + d < c + d + b_1 + b_3 + \underbrace{r + t}_{b_2}$$

$$a_1 + a_2 < b_1 + b_2 + b_3$$

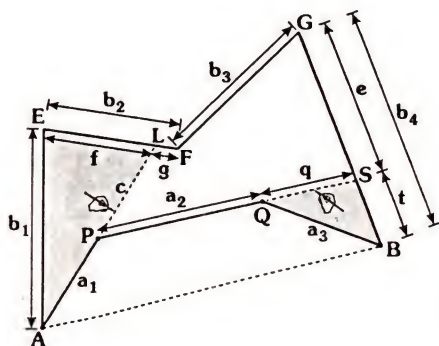
- Ahora podemos considerar la siguiente figura:



Se cumple:

$$a_1 + a_2 + a_3 < b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

Probemos el último resultado:



$$\text{En } \triangle AEF: a_1 + c < b_1 + f \quad \dots (I)$$

$$\text{En } \triangle QSB: a_3 > q + t \quad \dots (II)$$

Por teorema 54

Para P y S:

$$a_2 + q < c + g + b_3 + \theta \quad \dots (III)$$

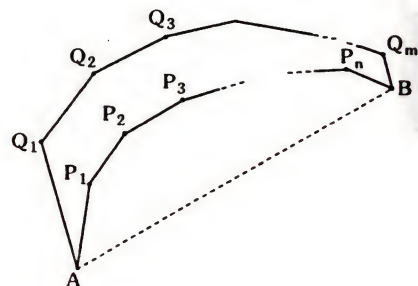
Sumando (I), (II) y (III):

$$a_1 + a_2 + a_3 + c + q < b_1 + \underbrace{(f+g)}_{b_2} + b_3 + \underbrace{(e+t)}_{b_4} + c + q$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 < b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

- Con lo cual queda probado el resultado, pero no podemos aún decir que el teorema ya fue probado. Es que solo hemos demostrado para casos particulares.

- Demostremos el teorema cuando ambas (la envuelta y la envolvente) son convexas.



Demostraremos:

$$AP_1 + P_1P_2 + \dots + P_nB < AQ_1 + Q_1Q_2 + \dots + Q_mB$$

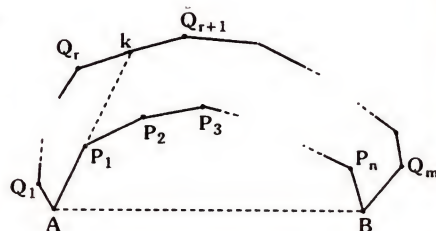
- Sea $n \geq 0$ y $m \geq 1$
- Por inducción fuerte en $m+n$
- Si $m+n=1$, es decir: $n=0$ y $m=1$

lo cual es cierto, por la desigualdad triangular:



- Supongamos que la hipótesis es cierta para: $1 \leq m+n \leq k$
- Demostraremos que es válida para:

$$m+n = k+1$$



• Notemos que $1 \leq r \leq m$ y que B representa a Q_{m+1}

• Por teorema (54):

$$AP_1 + P_1k < AQ_1 + Q_1Q_2 + \dots + Q_rk \quad \dots (\alpha)$$

• Por hipótesis:

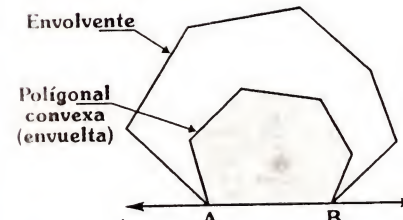
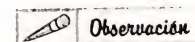
$$P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_nB < P_1k + kQ_{r+1} + \dots + Q_mB \quad \dots (\beta)$$

• Sumando (α) y (β) :

$$AP_1 + \cancel{P_1k} + P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_nB < AQ_1 + Q_1Q_2 + \dots + Q_rk + \cancel{P_1k} + kQ_{r+1} + \dots + Q_mB$$

$$\therefore AP_1 + P_1P_2 + \dots + P_nB < AQ_1 + Q_1Q_2 + \dots + Q_mB$$

Con lo cual queda ya probado el teorema.



Sea ℓ_1 : longitud de la envolvente.

ℓ_2 : longitud de la envuelta.

Del teorema anterior se demuestra:

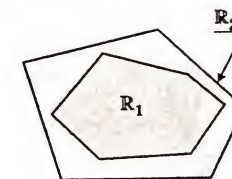
$$\text{Como: } \ell_1 < \ell_2 \Rightarrow \underbrace{\ell_1 + AB}_{p_1} < \underbrace{\ell_2 + AB}_{p_2}$$

$$\Rightarrow p_1 < p_2$$

p_1 : perímetro de la región limitada por la envuelta y \overline{AB} .

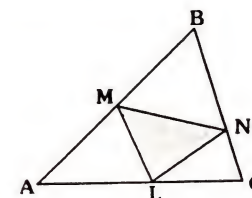
p_2 : perímetro de la región limitada por la envolvente y \overline{AB} .

CASOS PARTICULARES



- Si R_1 es convexo y es interior a R_2 . Se cumple:

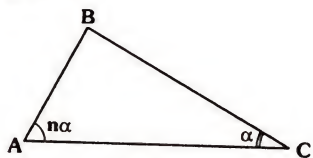
$$\text{Perímetro}_{(R_1)} < \text{Perímetro}_{(R_2)}$$



- Se cumple

$$\text{Perímetro}_{(\triangle MNL)} < \text{Perímetro}_{(\triangle ABC)}$$

TEOREMA 56



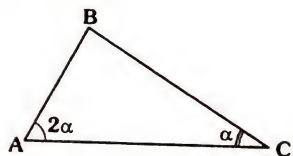
En el gráfico, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$
Se cumple:

$$AB < BC < n(AB)$$

Demostración

- La primera parte, es directo, puesto que $n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq 2 \Rightarrow n\alpha \geq 2\alpha > \alpha$
Por teorema de la correspondencia:
Como $n\alpha > \alpha \Rightarrow BC > AB$
- Para la segunda parte, $BC < n(AB)$ usaremos inducción

Cuando $n = 2$

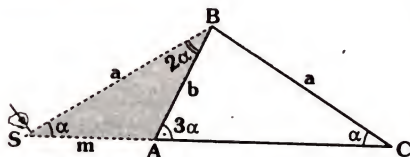


Por teorema 39: $BC < 2(AB)$

- Antes de indicar la hipótesis inductiva, analicemos para: $n = 3$ (De forma ilustrativa, lo cual nos dará la idea para el caso general).

Cuando $n = 3$

Ya fue probado (teorema 40), veamos otra forma:



- Se prolonga \overline{CA} hasta S, tal que:

$$m\angle ASB = \alpha \Rightarrow \triangle SBC$$

es isósceles $\Rightarrow SB = BS = a$

- En $\triangle SAB$, por lo anterior:

$$m < 2b$$

... (I)

$\triangle SAB$, por existencia

$$a < m + b$$

... (II)

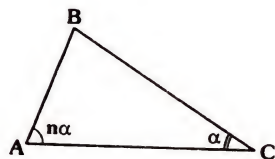
- Sumando (I) y (II):

$$a + m < m + 3b$$

$$\Rightarrow a < 3b$$

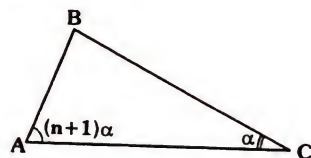
- Ahora sí, procedamos como se ha indicado en un prueba por inducción.

- Supongamos que se cumpla para n , $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$

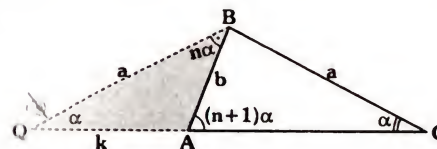


hipótesis inductiva: $BC < n(AB)$

- Probemos para " $n+1$ ":



- En forma análoga al caso de $n = 3$



- Se prolonga \overline{CA} hasta Q tal que

$m\angle CQB = \alpha \Rightarrow \triangle QBC$ es isósceles

$$\Rightarrow QB = BC = a$$

Como:

$$m\angle AQB = \alpha \Rightarrow m\angle QBA = n\alpha$$

- En $\triangle QAB$:

- Por hipótesis inductiva:

$$k < nb$$

... (I)

- Por existencia $a < k + b$

... (II)

- De (I) y (II): $a + k < k + (n+1)b$

$$\therefore a < (n+1)b$$

Con lo cual queda concluida la demostración.

Otra forma:

Como para $n = 2$ ya fue aprobado y

$$n \geq 2 \Rightarrow n(AB) \geq 2(AB)$$

Pero: $2(AB) > BC \Rightarrow n(AB) \geq 2(AB) > BC$

$$\therefore BC < n(AB)$$

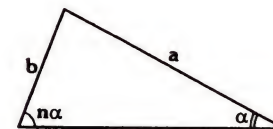


Observación

- La prueba realizada es equivalente a probar:

$$1 < \frac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha} < n$$

$$(n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2)$$



$$\frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha} = \frac{a}{b}$$

Como $a < nb$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} < n$$

- Analizando:

$$1 < \frac{a}{b} < n$$

ello no implica que sea 1 la mayor cota superior ni " n " la menor cota inferior, pero nos da un intervalo. Por ejemplo en el teorema 51, cuando $n = 4$ y

$x = 20^\circ$, se cumple $1 < \frac{a}{b} < 4$, lo cual

es verdadero, pero se demostró:

$$1 < \frac{a}{b} < 3$$

ANÁLISIS DE ALGUNOS DOBLES PARA OBTENER LÍNEAS NOTABLES

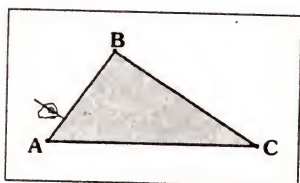
Toda persona interesada en educación matemática, reconoce el hecho que para aprender matemáticas hay que hacer matemáticas. Siendo en algunas etapas importante el aspecto manipulativo, por ello no es raro encontrar multitud de materiales y recursos como TAMGRAM, GEOPLANOS, VARILLAS, TROQUELES, etc, que potencian el hecho de hacer matemáticas.

El recurso más usual es el papel y no por ello menos atractivo.

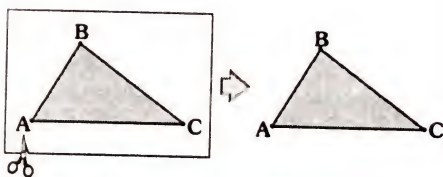
Se llama papiroflexia (también llamado ORIGAMI) como el arte de realizar figuras doblando papel, sin cortar ni pegar.

Las relaciones entre matemáticas y origami son hoy en día fuentes de investigación, se han realizado la elaboración de un sistema axiomático (axiomas de Huzita). En esta publicación no mencionaremos dichos axiomas, al lector interesado en la bibliografía le indicaré algunas páginas y unos textos concernientes al tema.

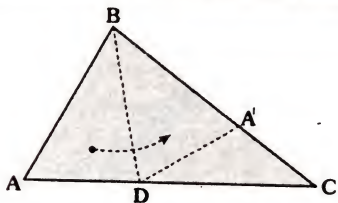
- Trazamos un triángulo sobre una hoja de papel



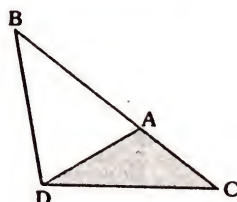
- Enseguida recortamos



Doble para la bisectriz interior.

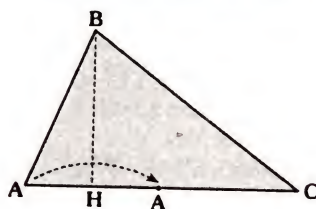


- Si llevamos A sobre \overline{BC} .

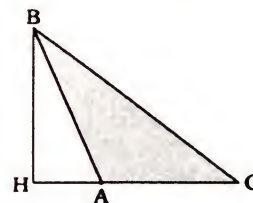


- El resultado de este doblez nos da la bisectriz interior (\overline{BD})

Doble para la altura

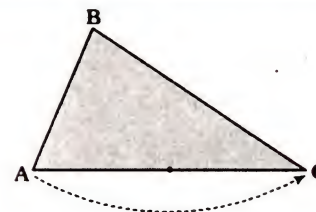


- Llevamos A hacia \overline{AC} , haciendo el doblez desde B.

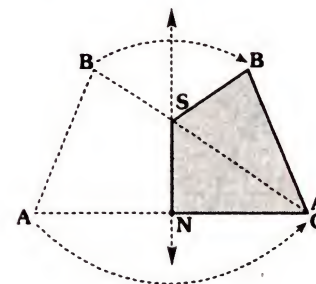


- El resultado de este doblez nos dará la altura (\overline{BH}).

Doble para la mediatriz de un lado.



- Llevamos A sobre C y hacemos el doblez, se obtendrá \overline{MN} .

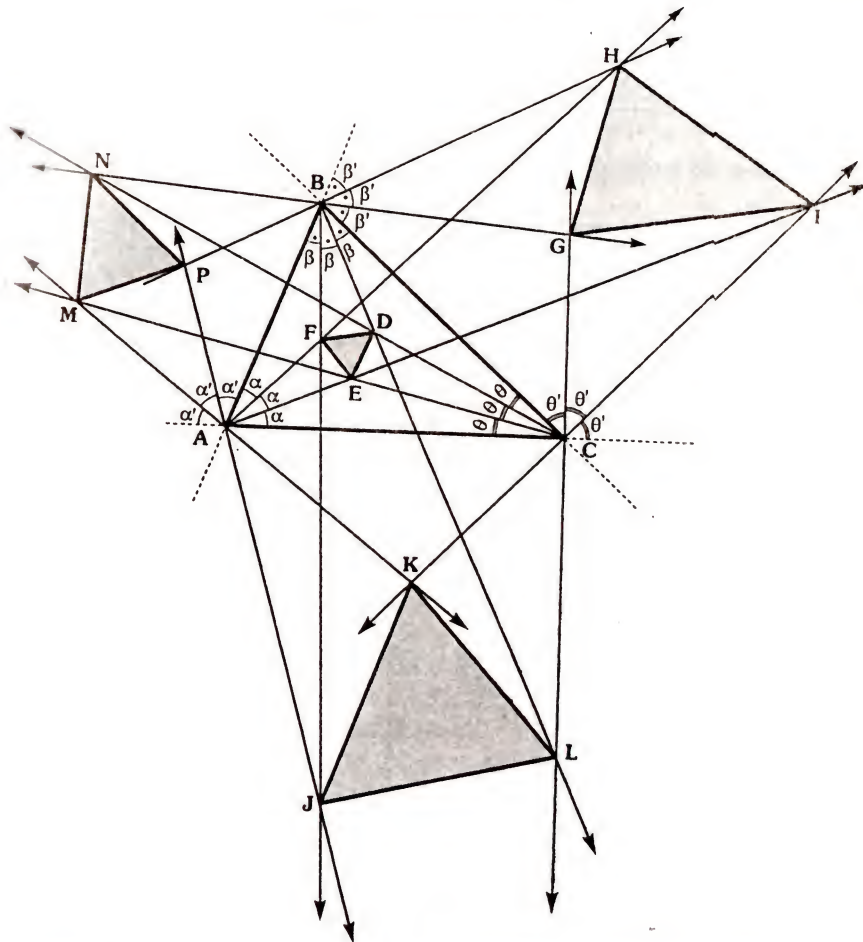


- \overline{SN} representará parte de la mediatriz de \overline{AC} (notar $m\angle ANS = m\angle SNC = 90^\circ$ y $AN = NC$).



Observaciones

- Del último doblez se obtiene la mediana desde B (haciendo el doblez de borde \overline{BN})
- En realidad si llevamos A sobre cualquier punto de \overline{AC} , se obtendrá el doblez de un segmento perpendicular a \overline{AC} .
- Para obtener algún doblez que se relacione con la bisectriz exterior o una altura (en el triángulo obtusángulo), se requiere representar la región exterior con parte del papel.

TEOREMA DE MORLEY

Al trisecar los ángulos internos como externos del triángulo ABC , se tiene que los triángulos DEF , GHI , JKL y MNP son equiláteros.

(Una forma de la demostración se encuentra en la publicación de "Puntos Notables" - Pág. 180)

Geometría
**ENUNCIADO DE LOS
PROBLEMAS
RESUELTOS**

ANUAL

CEPRE UNI

SEMESTRAL

SEMESTRAL INTENSIVO

REPASO

TRIÁNGULOS

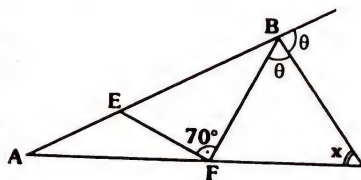
Problemas Resueltos

Ciclo Anual

PROBLEMA N° 1

En el gráfico, $AE=EF$. Calcule x .

- A) 70°
- B) 40°
- C) 35°
- D) 55°
- E) 45°



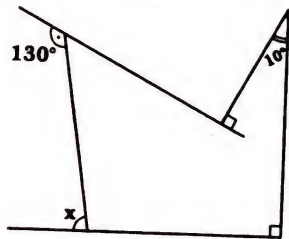
PROBLEMA N° 2

Del gráfico, calcule x .

- A) 40°
- D) 65°

- B) 45°
- E) 70°

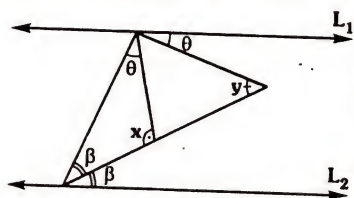
- C) 60°



PROBLEMA N° 3

En el gráfico $L_1 \parallel L_2$, calcule $x+y$.

- A) 90°
- B) 120°
- C) 135°
- D) 180°
- E) 270°



PROBLEMA N° 4

En el triángulo ABC se ubican P, Q y M en \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{PQ} respectivamente. Si \overline{AM} y \overline{CM} son bisectrices de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle ACB$ respectivamente y $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$. Si: $AP+QC=6$.

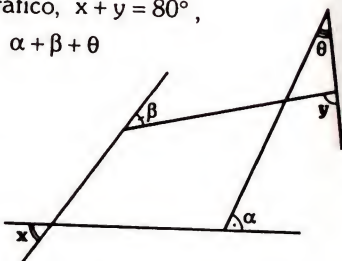
Calcule PQ

- A) 12
- B) 3
- C) 9
- D) 6
- E) 4,5

PROBLEMA N° 5

En el gráfico, $x+y=80^\circ$, Calcule $\alpha+\beta+\theta$

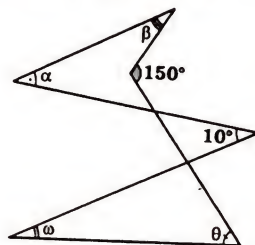
- A) 40°
- B) 50°
- C) 60°
- D) 80°
- E) 45°



PROBLEMA N° 6

En el gráfico, calcule $\alpha+\beta+\theta+\omega$.

- A) 140°
- B) 160°
- C) 170°
- D) 130°
- E) 180°



PROBLEMA N° 7

Se tiene el triángulo ABC, en la región exterior relativa a \overline{BC} se ubica D, Si $m\angle BDA = 2(m\angle BCA) = 20^\circ$, $AC=AD$ y $\overline{BC} \parallel \overline{CD}$. Calcule $m\angle CAD$

- A) 40°
- B) 50°
- C) 80°
- D) 50°
- E) 45°

PROBLEMA N° 8

En el triángulo ABC, se ubica D en \overline{AC} tal que $m\angle ABC = 80^\circ + m\angle BAC$ y $DC=BC$ calcule $m\angle ABD$

- A) 40°
- B) 50°
- C) 65°
- D) 80°
- E) 60°

PROBLEMA N° 9

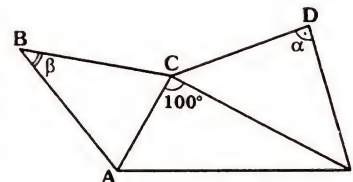
En el triángulo isósceles ABC de base BC, se traza la ceviana interior BM. Si $AM=MB=BC$, calcule $m\angle MBC$.

- A) 18°
- B) 30°
- C) 36°
- D) 54°
- E) 45°

PROBLEMA N° 10

En el gráfico, los triángulos ABC y CDE son isósceles de bases \overline{AC} y \overline{CE} respectivamente. Si $\alpha+\beta=140^\circ$, calcule $m\angle BCD$.

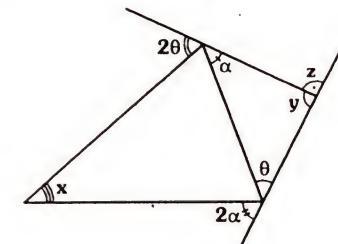
- A) 110°
- B) 120°
- C) 130°
- D) 150°
- E) 140°



PROBLEMA N° 11

Del gráfico, calcule $\frac{x+y}{z}$.

- A) 1
- B) $\frac{1}{2}$
- C) 2
- D) 3
- E) $\frac{1}{3}$



PROBLEMA N° 12

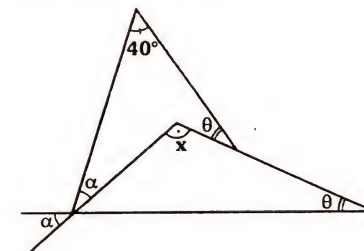
Los lados de un triángulo isósceles miden 5cm y 12cm. Calcule el perímetro de la región triangular.

- A) 22cm
- B) 29cm
- C) 22 ó 29cm
- D) 27cm
- E) 30cm

PROBLEMA N° 13

Del gráfico, calcule x .

- A) 100°
- B) 130°
- C) 110°
- D) 120°
- E) 140°



PROBLEMA N° 14

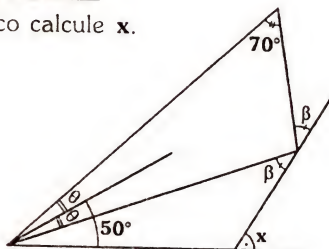
En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AM, tal que $AB = BM$ y $m\angle MAC = 10^\circ$. Calcule $m\angle BAC - m\angle BCA$.

- A) 10° B) 5° C) 20°
D) $7,5^\circ$ E) 15°

PROBLEMA N° 15

Del gráfico calcule x .

- A) 110°
B) 85°
C) 95°
D) 80°
E) 75°



PROBLEMA N° 16

En el triángulo ABC se trazan la bisectriz interior CD y la altura BH (H en \overline{AC}). Si $m\angle ABH = m\angle BCD$, $AH = 3$ y $HC = 4$. Calcule BC.

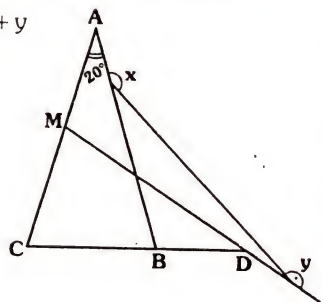
- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

PROBLEMA N° 17

En el gráfico, $AB = AC$ y $DM = DC$.

Calcule $x + y$.

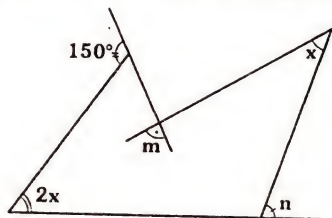
- A) 200°
B) 240°
C) 300°
D) 280°
E) 260°



PROBLEMA N° 18

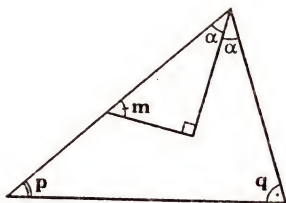
En el gráfico, $m + n = 150^\circ$, calcule x .

- A) 20° B) 30° C) 35°
D) 25° E) 40°



PROBLEMA N° 19

Indique la alternativa correcta en el gráfico.



- A) $m = \frac{p-q}{2}$ B) $m = \frac{p+q}{2}$
C) $m = \frac{p+q}{3}$ D) $m = p+q$
E) $m = \frac{p+q}{4}$

PROBLEMA N° 20

En el triángulo ABC, se cumple $m\angle ABC = 98^\circ$, luego se ubica D exterior y relativo a \overline{AC} . Si $AB = AD$, $m\angle CAD = x$, $m\angle BAC = 60^\circ - x$ y $m\angle ADC = 164^\circ$. Calcule x .

- A) 6° B) 12° C) 10°
D) 8° E) 9°

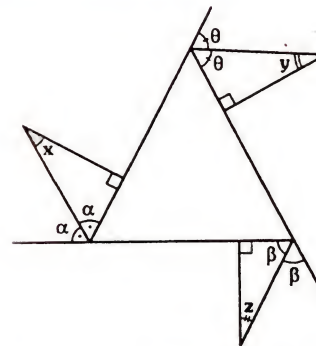
PROBLEMA N° 21

En el triángulo isósceles ABC ($AB = BC$), se ubica E en la prolongación de \overline{CB} , desde el cual se traza la perpendicular a \overline{AC} , cortando a \overline{AB} en F. Si $AF = 7$ y $CE = 29$. Calcule EB.

- A) 11 B) 10 C) 20
D) 22 E) 18

PROBLEMA N° 22

Del gráfico, calcule $x + y + z$.



- A) 90° B) 180° C) 270°
D) 120° E) 135°

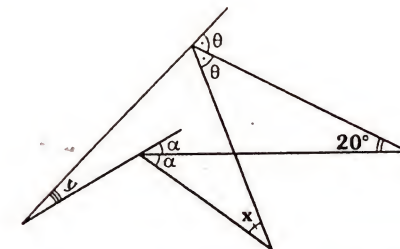
PROBLEMA N° 23

En el triángulo rectángulo NPQ (recto en P) se trazan las cevianas interiores PB y QA, tal que $m\angle PQN = 2(m\angle NPB)$. Si $NP = AN + QB$. Calcule $m\angle PAQ$.

- A) 44° B) 45° C) 30°
D) 60° E) 56°

PROBLEMA N° 24

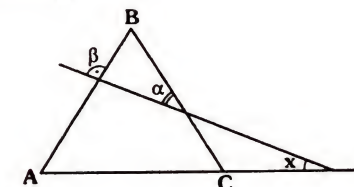
Del gráfico, calcule $x - y$.



- A) 10° B) 15° C) 20°
D) 40° E) 30°

PROBLEMA N° 25

En el gráfico, $AB = BC$ y $\alpha + \beta = 40^\circ$. Calcule x .



- A) 40° B) 80° C) 70°
D) 45° E) 50°

PROBLEMA N° 26

Los lados de un triángulo miden 10, a y 2a, calcule el menor valor entero de a.

- A) 4 B) 3 C) 2
D) 5 E) 1

PROBLEMA N° 27

Calcule el mayor valor entero de la longitud de un lado, si el perímetro de su región es 40.

- A) 20 B) 21 C) 22
D) 19 E) 18

PROBLEMA N° 28

En el triángulo ABC, se ubican los puntos D y E en \overline{AB} y \overline{AC} respectivamente. Si $m\angle BCA = 60^\circ$, $m\angle AED = 35^\circ$ y $BD = BC = EC$. Calcule $m\angle BAC$

- A) 60° B) 80° C) 50°
D) 70° E) 40°

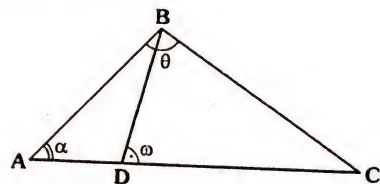
PROBLEMA N° 29

Calcule el perímetro de una región triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 5 y 6 y el tercero tiene por longitud el doble de uno de los otros dos.

- A) 19 B) 20 C) 22
D) 23 E) 21

PROBLEMA N° 30

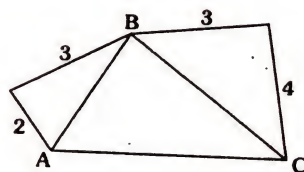
En el gráfico, $\alpha + \theta = 2\omega$, $AD = 3$ y $AC = 8$. Calcule BC.



- A) 3 B) 5 C) 6
D) 4 E) 2

PROBLEMA N° 31

En el gráfico, calcule el mayor valor entero de $AB + BC$.



- A) 8
B) 9
C) 11
D) 13
E) 10

PROBLEMA N° 32

Calcule el perímetro de una región triangular, sabiendo que los lados tienen longitudes enteras y miden $2x - 1$, $6 - x$ y $3x - 1$.

- A) 6 B) 14 C) 12
D) 10 E) 15

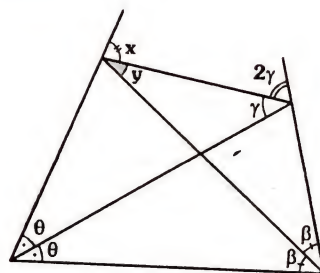
PROBLEMA N° 33

En la región interior de un triángulo equilátero se ubica un punto, tal que la suma de distancias de dicho punto a los vértices es 9m. Calcule la longitud del lado del triángulo equilátero, sabiendo que es entera.

- A) 5m B) 4m C) 3m
D) 1m E) 2m

PROBLEMA N° 34

Del gráfico, calcule x/y .



- A) $\frac{1}{2}$ B) 3 C) $\frac{1}{3}$
D) 2 E) 1

PROBLEMA N° 35

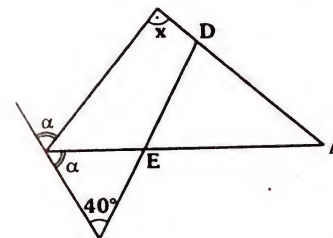
Se tiene el triángulo ABC, en \overline{AC} se ubica D, tal que $m\angle ACB = \alpha$, $m\angle BAC = 2\alpha$ y

$m\angle DBC = 3\alpha$. Si $AB = 12$ y $BD = 10$. Calcule CD.

- A) 21 B) 23 C) 18
D) 22 E) 20

PROBLEMA N° 36

En el gráfico, $AD = AE$. Calcule x .



- A) 100° B) 80° C) 85°
D) 90° E) 95°

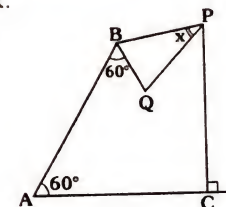
PROBLEMA N° 37

En el triángulo ABD se ubica el punto C en la región exterior relativa a \overline{AD} tal que $AB = BC = AC = BD$. Calcule $m\angle ADC$

- A) 30° B) 15° C) 40°
D) 45° E) 20°

PROBLEMA N° 38

En el gráfico, $AB = AC = PC$ y $BP = PQ$. Calcule x .



- A) 25° B) 35° C) 40°
D) 45° E) 30°

PROBLEMA N° 39

En el triángulo ABC se cumple $AB = 2$ y $m\angle BAC = 2(m\angle BCA)$. Calcule el valor de BC.

- A) 2 B) 4 C) 3
D) 6 E) 5

PROBLEMA N° 40

Se tiene el triángulo ABC ($AB = BC$), se ubica E, F y D en \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} respectivamente. Si $DF = EF$ y

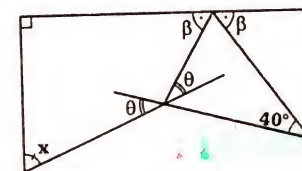
$$m\angle BEF + m\angle DFC = 78^\circ$$

Calcule $m\angle ADE$

- A) 39° B) 22° C) 24°
D) 32° E) 26°

PROBLEMA N° 41

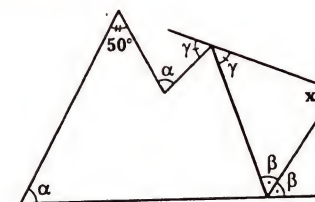
Del gráfico, calcule x .



- A) 80° B) 70° C) 60°
D) 65° E) 75°

PROBLEMA N° 42

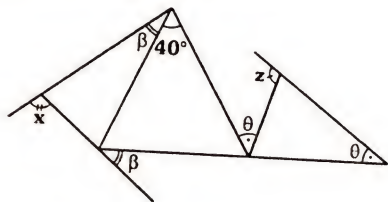
Del gráfico, calcule x .



- A) 50°
B) 80°
C) 40°
D) 65°
E) 75°

PROBLEMA N° 43

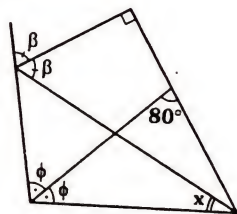
Del gráfico, calcule $z + x$.



- A) 220° B) 210° C) 300°
D) 260° E) 280°

PROBLEMA N° 44

Del gráfico, calcule x .



- A) 10° B) 20° C) 15°
D) 5° E) 25°

PROBLEMA N° 45

En el triángulo ABC, las bisectrices trazadas de A y C se cortan en P. Si $AP=6$ y $PC=8$. Calcule el número de valores enteros de AC.

- A) 0 B) 1 C) 3
D) 2 E) 4

PROBLEMA N° 46

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior BF, si $AF=a$, $AB=b$ y

$$m\angle BAC = 2(m\angle BCA)$$

Calcule BC.

- A) $a+b$ B) $\sqrt{a^2+b^2}$ C) \sqrt{ab}
D) $a-b$ E) $\frac{a+b}{2}$

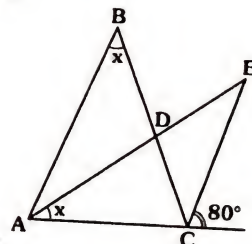
PROBLEMA N° 47

En el triángulo isósceles ABC ($AC=BC$), se traza la bisectriz interior BR, tal que $AB=BR$. Calcule $m\angle BCA$.

- A) 24° B) 36° C) 30°
D) 48° E) 18°

PROBLEMA N° 48

En el gráfico, $AB=BC$ y $AD=CE$. Calcule x .



- A) 40° B) 50° C) 30°
D) 60° E) 20°

PROBLEMA N° 49

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BD, tal que $AD=BC$; $BD=DC$ y $m\angle BAC = m\angle DBC$. Calcule $m\angle BAC$.

- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 36°

PROBLEMA N° 50

En el triángulo ABC se ubica el punto D, exterior y relativo a AC, tal que $AB=BC=AD$, $m\angle ACD = 2x$ y

$$m\angle ADC = 3(m\angle BAC) = 9x$$

Calcule x .

- A) 10° B) 15° C) 18°
D) 12° E) 20°

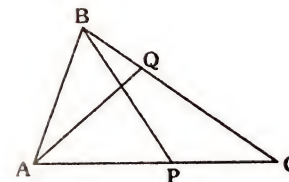
PROBLEMA N° 51

En el triángulo rectángulo ABC ($AB=BC$), se ubica el punto F exterior y relativo a AC, de modo que $AB=CF$ y $m\angle ACF = 15^\circ$. Calcule $m\angle CAF$.

- A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA N° 52

En el gráfico, $AB=AQ=m$ y $BP=PC$. Si m es par, calcule el menor entero de BP.



- A) $m-1$ B) $\frac{m}{2}+1$ C) $\frac{m}{2}-1$
D) $\frac{m}{2}-2$ E) m

PROBLEMA N° 53

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B) se trazan las cevianas interiores AM y CN tal que $AN=MN=MC$. Calcule la medida del ángulo entre \overline{AM} y \overline{CN} .

- A) 90° B) 120° C) 135°
D) 60° E) 108°

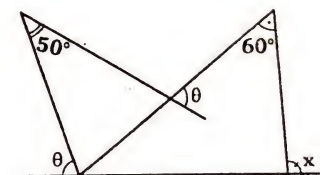
PROBLEMA N° 54

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores BP y BQ tal que $PC=BC$ y $AQ=AB$. Si $m\angle ABC = 100^\circ$. Calcule $m\angle PBQ$.

- A) 80° B) 50° C) 70°
D) 25° E) 40°

PROBLEMA N° 55

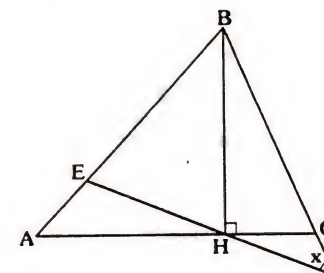
Del gráfico, calcule x .



- A) 100° B) 80° C) 110°
D) 85° E) 120°

PROBLEMA N° 56

En el gráfico, $AB=AC$ y $BH=BE$. Calcule x .



- A) 60° B) 45° C) 30°
D) 36° E) 72°

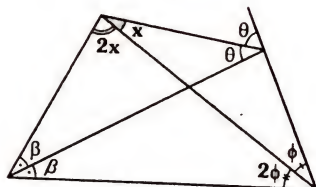
PROBLEMA N° 57

En el triángulo ABC se cumple $m\angle BCA = 2(m\angle BAC) = 40^\circ$. En la prolongación de AC se ubica P, tal que $PC = AB + BC$. La medida del ángulo CPB es:

- A) 20° B) 10° C) 15°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA N° 58

Del gráfico, calcule x .



- A) 30° B) 18° C) 20°
D) 36° E) 15°

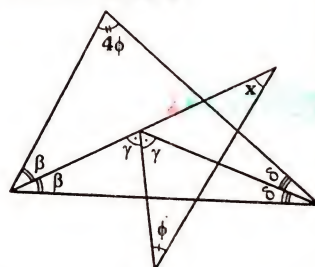
PROBLEMA N° 59

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AF y la altura BH secantes en M. Si $m\angle FAC = 2(m\angle HBC)$ $AF = BC = 6$. Calcule el mayor valor entero de AB.

- A) 10 B) 11 C) 13
D) 12 E) 9

PROBLEMA N° 60

Del gráfico, calcule x .



- A) 30° B) 36° C) 72°
D) 45° E) 60°



Problemas Resueltos

Ciclo **Cepre-Uni**

PROBLEMA N° 61

(1° PC - 2001-II)

En un triángulo ABC; $AB = BC$; $D \in \overline{AC}$; $E \in \overline{AD}$; $AE = BC$ y $m\angle DBC = 2(m\angle EBD)$. Calcule $m\angle BDA$.

- A) 30° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 75°

PROBLEMA N° 62

(SEMINARIO 2007-I)

En un triángulo ABC sus lados miden $AB = \sqrt{x^2 - 1}$; $BC = 2$ y $AC = 3$. Entonces ¿cuántos valores enteros de x satisfacen la condición del triángulo?

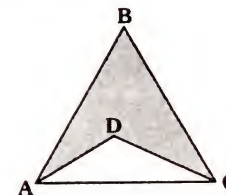
- A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

PROBLEMA N° 63

(SEMINARIO 2007-I)

Calcule el menor valor expresado en números enteros de la parte sombreada, sabiendo que el perímetro del triángulo equilátero ABC es mayor que 33m; $AD = 4m$ y $CD = 9m$.

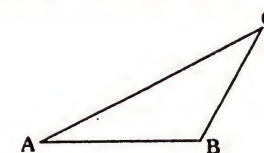
- A) 30m
B) 38m
C) 36m
D) 37m
E) 40m



PROBLEMA N° 64

(SEMINARIO 2007-II)

En la figura mostrada, se verifica $AC = 21u$, $BC = 7u$ y $AB = x$, calcule el mayor valor entero de: $(2x - 3)$



- A) 36 B) 52 C) 38
D) 39 E) 40

PROBLEMA N° 65

(SEMINARIO 2007-II)

En el triángulo ABC se cumple que $BC = 7u$ y $m\angle A = 2m\angle C$. Se trazan la bisectriz interior BP y la bisectriz exterior BQ, Q pertenece a la prolongación de CA. Calcule PQ.

- A) 16 B) 15 C) 14
D) 13 E) 12

PROBLEMA N° 66

(SEMINARIO 2003-II)

En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior desde el vértice B, la cual interseca en H a la perpendicular trazada desde C a dicha bisectriz. Si $m\angle BAC - m\angle BCA = 20^\circ$. Halle la medida del ángulo ACH.

- A) 5° B) 7° C) 9°
D) 10° E) 20°

PROBLEMA N° 67 (SEMINARIO 2003-II)

En el interior de un triángulo ABC se ubica D tal que $BD=AC$ y

$$\frac{m\angle ACD}{2} = \frac{m\angle DCB}{3} = \frac{m\angle BAD}{7} =$$

$$m\angle DAC = m\angle DBC.$$

Calcule $m\angle ABD$.

- A) 60° B) 50° C) 40°
D) 30° E) 20°

PROBLEMA N° 68 (SEMINARIO 2003-II)

En un triángulo ABC, desde el vértice B se trazan las perpendiculares \overline{BP} y \overline{BQ} a las bisectrices exteriores de los ángulos A y C. Si $m\angle ABC = \theta$, entonces la $m\angle PBQ$ es:

- A) $90^\circ + \frac{2}{3}\theta$ B) $90^\circ + \theta$
C) $90^\circ + \frac{\theta}{2}$ D) $90^\circ + \frac{3}{4}\theta$
E) $90^\circ + \frac{3}{5}\theta$

PROBLEMA N° 69 (1era P.C. 2002-II)

En un triángulo ABC, $m\angle A = 60^\circ$, $m\angle C = 10^\circ$, sean los puntos $M \in \overline{AC}$ y $Q \in \overline{BC}$ de modo que $AB=BQ=AM$. Calcule $m\angle QMC$.

- A) 30° B) 35° C) 45°
D) 55° E) 70°

PROBLEMA N° 70 (1era P.C. 2003-I)

Se tiene un triángulo ABC, en \overline{BC} se ubican los puntos Q y S ($Q \in \overline{BS}$) y en

\overline{AC} se ubican los puntos P, R y T ($P \in \overline{AR}$ y $T \in \overline{RC}$).

Si $AB=BP=PQ=QR=RS=ST=TC$, calcule la medida del ángulo ACB sabiendo que es el mayor número entero.

- A) 10° B) 13° C) 15°
D) 18° E) 14°

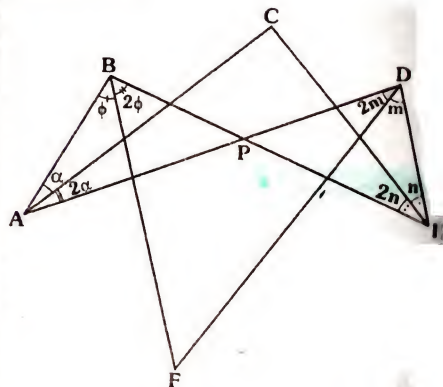
PROBLEMA N° 71 (SEMINARIO 2006-II)

¿Cuántos triángulos isósceles existen de perímetro 18 y lados enteros?

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA N° 72

En la figura mostrada, se cumple $m\angle ACE + m\angle BFD = \omega$, entonces la $m\angle BPD$ es:



- A) 2ω B) $\frac{3}{2}\omega$ C) ω
D) $\frac{5}{3}\omega$ E) $\frac{2}{3}\omega$

PROBLEMA N° 73 (SEMINARIO 2006-II)

En un triángulo ABC, se trazan las bisectrices interiores AF y BE que se intersectan en I. Si $AI=b$, $BC=a$ y $m\angle BAC = 2(m\angle BCA)$

Entonces la longitud de \overline{AB} es:

- A) $\frac{(a-b)}{2}$ B) $a-b$ C) $\frac{a+b}{3}$
D) $\frac{(a+b)}{4}$ E) $2b-a$

PROBLEMA N° 74 (1era P.C. 2003-II)

En un triángulo ABC, se ubica P exterior a dicho ángulo, tal que \overline{AP} interseca a \overline{BC} . Si $BP=10u$, $BC=13u$ y $AP=11u$, luego el máximo valor entero (en u) del lado AC es:

- A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

PROBLEMA N° 75 (1era P.C. 2005-I)

En un triángulo ABC se cumple $m\angle BCA = 18^\circ$ y $AB > BC$. Entonces, el mínimo valor entero para la medida del ángulo ABC es:

- A) 145° B) 144° C) 147°
D) 150° E) 153°

PROBLEMA N° 76 (1era P.C. 2005-II)

Se tiene un triángulo ABC, $AB=BC=a$, donde a pertenece a los naturales, una recta secante interseca a \overline{AB} y \overline{BC} en F y E respectivamente y a la prolongación de \overline{AC} en D, si la $m\angle ADF > m\angle ABC$, $AD=a$ y $EF=3$. El mínimo valor entero de la longitud del segmento DE es:

- A) $a-4$ B) $a-2$ C) $a-1$
D) $a+1$ E) $a+2$

PROBLEMA N° 77 (1era P.C. 2007-I)

Se tiene el triángulo ABC, en \overline{AB} y \overline{BC} se ubican los puntos P y Q respectivamente, diferentes de los vértices. Entonces se cumple:

- A) $PQ + AC = AQ + PC$
B) $PQ + AC < AQ + PC$
C) $2(PQ) + AC > PC + AQ$
D) $PQ + AC > PC + AQ$
E) $PQ - AC > 2(PC) - AQ$

PROBLEMA N° 78 (1ª P.C. 2007-I)

En un triángulo escaleno ABC la bisectriz del ángulo BAC y la bisectriz del ángulo exterior en C se intersectan en E. La bisectriz del ángulo AEC interseca a \overline{AC} en D y a la bisectriz del ángulo ABC en F.

Si $m\angle EDC = \theta$ halle $m\angle BFE$:

- A) $90^\circ - \frac{\theta}{2}$ B) $45^\circ - \theta$ C) 3θ
D) $\frac{\theta}{2}$ E) θ

PROBLEMA N° 79

(1er. EXÁMEN PARCIAL 2001-I)

Los lados de un triángulo miden:

$$8u; (5 + \sqrt{16-x})u \text{ y } (5 - \sqrt{16-x})u$$

La suma de todos los valores enteros posibles que puede tomar x es:

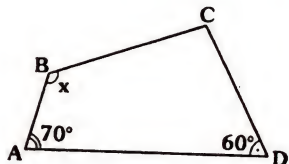
- A) 150 B) 146 C) 140
D) 136 E) 120

PROBLEMA N° 80

(1er. EXÁMEN PARCIAL 2001-I)

En la figura, $AD = AB + BC$ y $BC = CD$, halle x .

- A) 100°
B) 120°
C) 130°
D) 135°
E) 140°



PROBLEMA N° 81

(1er. EXAMEN PARCIAL 2000-II)

Se tiene un triángulo isósceles ABC cuyo ángulo desigual ABC mide θ grados. Se trazan, la mediatriz de \overline{AB} y la bisectriz del ángulo ACB, los cuales forman un ángulo agudo de x grados. Entonces la relación entre x y θ es:

- A) $x = \frac{\theta}{4}$
B) $90^\circ - \frac{\theta}{4}$
C) $x = 45^\circ - \frac{\theta}{2}$
D) $x = 180^\circ - 4\theta$
E) $x = 45^\circ - \frac{3\theta}{4}$

PROBLEMA N° 82

(Texto CEPRE UNI - 2004)

En el interior de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica Q; $AQ \cap \overline{BC} = \{E\}$; $CQ \cap \overline{AB} = \{F\}$. Si $AQ + QC = 10u$ y $QE + QF = 4u$ ¿cuántos posibles valores enteros para la longitud de la hipotenusa existen?

- A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

PROBLEMA N° 83

(Texto CEPRE UNI- 2004)

En un triángulo isósceles ABC ($AB = BC$) se ubica el punto interior Q de modo que

$$m\angle ABQ = m\angle QAC = 30^\circ;$$

$$m\angle QBC = 10^\circ$$

Calcule $m\angle BQC$.

- A) 120° B) 135° C) 150°
D) 100° E) 90°

PROBLEMA N° 84

(Texto CEPRE UNI - 2004)

En un triángulo ABC, $m\angle ACB = 30^\circ$, $m\angle ABC = 105^\circ$, sea M punto medio de \overline{BC} . Calcule $m\angle MAC$.

- A) 15° B) 20° C) 30°
D) $45^\circ/2$ E) 18°

PROBLEMA N° 85

(Texto CEPRE UNI-2004)

En un triángulo acutángulo ABC, la bisectriz del ángulo ABC y la bisectriz exterior del ángulo C se intersectan en F; las bisectrices de los ángulos BAC y BFC, se intersectan en R y al lado \overline{BC} en P y Q respectivamente, entonces el triángulo PQR es:

- A) Isósceles B) Equilátero
C) Rectángulo D) No está definido
E) Escaleno

PROBLEMA N° 86

(Texto CEPRE - UNI 2004)

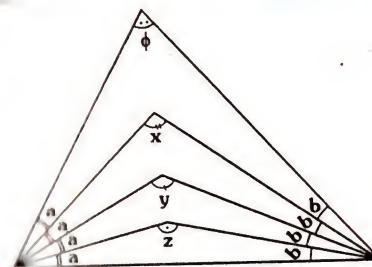
Dado un triángulo ABC ($AB = BC$), se ubican P, Q y R en \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} respectivamente de modo que PQR es un trián-

equilátero. Si $m\angle BPQ = \alpha$ y $m\angle HQC = \beta$ Calcule $m\angle PRA$.

- A) $\alpha - \beta$
B) $\frac{\alpha + \beta}{2}$
C) $\alpha + \beta$
D) $45^\circ - \frac{(\alpha + \beta)}{2}$
E) $90^\circ - \frac{(\alpha + \beta)}{2}$

PROBLEMA N° 87 (1er SEMINARIO 99-I)

En el siguiente gráfico, calcule $x + y + z$.



- A) $270^\circ + \frac{3}{2}\phi$ B) $270^\circ + \frac{3}{4}\phi$
C) $135^\circ + \frac{3}{2}\phi$ D) $135^\circ + \frac{3}{4}\phi$
E) $360^\circ - \frac{3}{4}\phi$

PROBLEMA N° 88 (1er SEMINARIO 99-I)

En un triángulo ABC se ubica el punto interior O, si $OA = x$; $OB = 2x$ y $OC = 3x$. Además $AB = 5u$; $BC = 6u$ y $AC = 7u$.

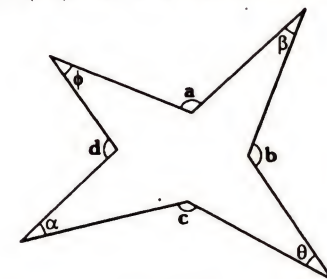
Calcule entre que valores varía x .

- A) $1,75 < x < 2,16$ B) $1,75 < x < 2,4$
C) $\frac{5}{3} < x < 2,4$ D) $1 < x < 2$
E) $1,75 < x < 2$

PROBLEMA N° 89 (1er SEMINARIO 99-I)

En el siguiente gráfico, calcule:

$$\alpha + \phi + \beta + \theta; \text{ si } a + b + c + d = 518^\circ$$



- A) 154° B) 156° C) 157°
D) 158° E) 159°

PROBLEMA N° 90 (1er SEMINARIO 99-I)

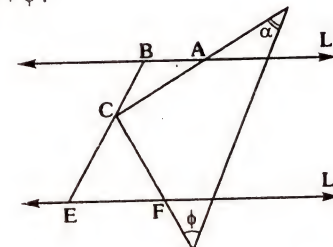
En un triángulo ABC (obtusos en B), $D \in \overline{AC}$, $E \in \overline{AB}$, $F \in \overline{BC}$, $m\angle ADE = a + b$; $m\angle EDF = a - b$; $m\angle FDC = 3b - a$.

Si $m\angle BAC = 8^\circ$, $m\angle BED = m\angle BFD$ y b toma su mayor valor entero. ¿Cuánto mide el ángulo ABC?

- A) 138° B) 156° C) 148°
D) 162° E) 152°

PROBLEMA N° 91 (1er SEMINARIO 98-I)

En el gráfico $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$, $AB = BC$ y $EC = EF$, calcule $\alpha + \phi$.



- A) 75°
B) 90°
C) 120°
D) 110°
E) 105°

PROBLEMA Nº 107 (1er SEMINARIO 99-II)

En un triángulo ABC las bisectrices interiores se intersectan en I, por I se traza una perpendicular a \overline{CI} la cual interseca a la bisectriz exterior del triángulo ABC, trazada desde A en Q. La bisectriz exterior del triángulo AIQ, trazada desde Q interseca a la prolongación de \overline{IC} en el punto P.

Si $2(m\angle IPQ) = m\angle ABC$. Calcule $m\angle IPQ$.

- A) 60° B) 54° C) 45°
D) 36° E) 30°

PROBLEMA Nº 108 (1er SEMINARIO 99-II)

La raíces de la ecuación:

$$x^3 - 7x^2 + 12x - nx^2 + 7nx - 12n = 0$$

son las medidas de los lados de un triángulo. Halle la suma de todos los valores enteros posibles de n .

- A) 18 B) 20 C) 15
D) 22 E) 23

PROBLEMA Nº 109 (1er SEMINARIO 2007-II)

Dado un triángulo, sus ángulos interiores miden:

$$(3x + 2y), (3x - 2y) \text{ y } (4y - 3x)$$

¿Cuál es el menor valor entero múltiplo de tres que puede tomar y ?

- A) 21° B) 24° C) 27°
D) 30° E) 33°

PROBLEMA Nº 110 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo ABC isósceles, se cumple $m\angle ABC = 100^\circ$, se trazan las cevianas interiores BP y CQ, tal que:

$$m\angle ABP = m\angle BCQ = 30^\circ$$

Calcule $m\angle CQP$.

- A) 20° B) 40° C) 30°
D) 50° E) 36°

PROBLEMA Nº 111 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y CN, las prolongaciones de las cevianas interiores trazadas desde M y N en los triángulos AMC y ANC respectivamente, se cortan en Q, tal que:

$$m\angle MCN = 2(m\angle MAC) ;$$

$$m\angle NAM = 2(m\angle ACN) ;$$

$$m\angle ANQ = 3(m\angle AMQ) ; \text{ y}$$

$$m\angle QMC = 3(m\angle QNC)$$

Calcule $m\angle MQN$

- A) 90° B) 100° C) 105°
D) 110° E) 120°

PROBLEMA Nº 112 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo PQR, se traza la bisectriz interior RT, se ubica M en \overline{QR} , por M se traza una recta perpendicular a la bisectriz, la recta interseca a \overline{RP} en el punto F. Si $m\angle QPR + m\angle RQP = \theta$. Calcule $m\angle RMF$.

- A) θ B) $\frac{\theta}{2}$ C) 2θ
D) $\frac{2\theta}{3}$ E) $\frac{3\theta}{4}$

PROBLEMA Nº 113 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo ABC se cumple:

$$m\angle ABC + m\angle ACB = 100^\circ$$

Calcule la medida del ángulo agudo que determinan la altura trazada desde B y la

bisectriz exterior trazada de A.

- A) 50° B) 48° C) 40°
D) 60° E) 55°

PROBLEMA Nº 114 (1er SEMINARIO 2005-II)

En el lado BC de un triángulo ABC se ubica D, tal que $CD = L$ y

$$2(m\angle CDA) = m\angle BAC + m\angle ABC$$

Calcule AC.

- A) L B) $\frac{L}{2}$ C) $\frac{L}{3}$
D) $\frac{2}{3}L$ E) $\frac{3}{4}L$

PROBLEMA Nº 115 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo ABC (recto en B) se traza la altura BH. Las bisectrices de los ángulos ABH y HBC cortan a \overline{AC} en M y N respectivamente.

Si $AB + BC - AC = K$. Calcule MN.

- A) K B) $\frac{2}{3}K$ C) $\frac{3}{4}K$
D) $\frac{K}{2}$ E) $\frac{3}{5}K$

PROBLEMA Nº 116 (1er SEMINARIO 2005-II)

En el triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores BD y CE, luego se trazan los rayos DP y EP tal que:

$$m\angle BEP = 2(m\angle PEC) ;$$

$$m\angle CDP = 2(m\angle PDB) \text{ y}$$

$$m\angle BAC = \omega$$

Calcule $m\angle EPD$

- A) $\omega/2$ B) $60^\circ - \omega$ C) 45°
D) 60° E) $180^\circ - 2\omega$

PROBLEMA Nº 117 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo ABC, en la prolongación de \overline{AC} se ubica Q, a partir del cual se traza el rayo secante a \overline{BC} en E y a \overline{AB} en D.

Si $m\angle BCQ = 134^\circ$ y $AQ = AB = QD$.

Calcule el valor entero de $m\angle ABC$.

- A) 39° B) 41° C) 43°
D) 45° E) 46°

PROBLEMA Nº 118

(1er SEMINARIO 2005-II/ texto CEPRE UNI 2004

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. En un triángulo ABC se cumple que $AB > AC$, las bisectrices interiores de los ángulos B y C, se intersectan en I, entonces $IB > IC$.

II. M es un punto de \overline{BC} , entonces $AM < p$; siendo p el semiperímetro del triángulo.

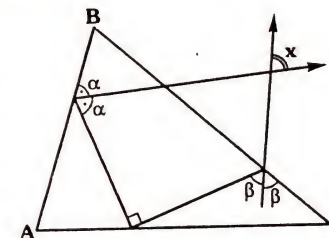
III. Todo triángulo isósceles también es acutángulo.

- A) VVF B) VVV C) FVF
D) VFV E) FVV

PROBLEMA Nº 119 (1er SEMINARIO 2006-I)

En el gráfico, $m\angle ABC = 40^\circ$, calcule x .

- A) 40°
B) 45°
C) 50°
D) 60°
E) 65°



PROBLEMA N° 120 (1er SEMINARIO 200-I)

Se tienen los triángulos ABC y AMN, donde $M \in AC$ y $B \in AN$, además:

$$m\angle MBC = m\angle NBC$$

$$m\angle BMN = m\angle NMC$$

Si $m\angle BAC = \phi$. Halle la medida del ángulo entre las bisectrices interiores de los ángulos en N y C.

- A) $90^\circ + \frac{\phi}{4}$ B) $135^\circ - \frac{\phi}{4}$
C) $45^\circ + \frac{\phi}{4}$ D) $90^\circ + \frac{\phi}{4}$
E) $45^\circ - \frac{\phi}{4}$

PROBLEMA N° 121 (1er SEMINARIO 2006-I)

En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior desde A y la bisectriz exterior desde C, las cuales se cortan en E, las bisectrices de los ángulos ABC y AEC se intersectan en Q e intersectan a AC en M y N. Si $MN = 8\text{ cm}$. Calcule MQ (en cm)

- A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

PROBLEMA N° 122 (1er SEMINARIO 2006-II)

En un triángulo se trazan las cevianas interiores BE y AD de manera que $AB = AE = BD$, $DE = DC$ y $m\angle BAE = 60^\circ$. Calcule $m\angle EDC$.

- A) 80° B) 90° C) 100°
D) 120° E) 145°

PROBLEMA N° 123 (1er SEMINARIO 2006-II)

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores BE y CD, F es un

punto interior del triángulo ABC tal que

$$m\angle BDF = 4(m\angle FDC)$$

$$m\angle FEC = 4(m\angle BEF)$$

$$m\angle BDC = 5(m\angle CDF)$$

$$m\angle DAE + m\angle DFE = 180^\circ$$

Calcule $m\angle BAC$

- A) 60° B) 75° C) 90°
D) 100° E) 101°

PROBLEMA N° 124 (1er SEMINARIO 2006-II)

En un triángulo ABC, la bisectriz interior del ángulo A y exterior del ángulo C se intersectan en E. Por el punto E se traza una recta paralela a AC que intersecta a los lados BC y BA en P y Q respectivamente. Si $AQ - CP = \ell$, entonces la longitud de PQ es:

- A) ℓ B) $\frac{\ell}{2}$ C) $\frac{2}{3}\ell$
D) $\frac{\ell}{3}$ E) $\frac{3}{4}\ell$

PROBLEMA N° 125 (1er SEMINARIO 2006-II)

En un triángulo ABC (recto en B), $AB = BC$, se ubica P interior al triángulo, tal que $3(m\angle BAP) = 2(m\angle PBC) = 6(m\angle PCA)$.

Entonces $m\angle APC$ es:

- A) 120° B) 105° C) 136°
D) 144° E) 150°

PROBLEMA N° 126 (1er SEMINARIO 2006-II)

Los lados AB, BC y AC de un triángulo miden 8; 10 y 12 u respectivamente. Se ubica F en la región interior tal que

$$AF = \frac{BF}{2} = \frac{CF}{3}$$

¿Entre que valores se en-

cuenta el perímetro del triángulo AFC?

- A) Entre 24 y 26 B) Entre 24 y 28
C) Entre 26 y 28 D) Entre 25 y 29
E) Entre 24 y 27

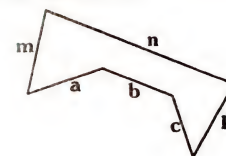
PROBLEMA N° 127 (1er SEMINARIO 2006-II)

Sean los triángulos rectángulos ABC y ADC, cuya hipotenusa común es AC y cuyos catetos de mayor longitud son AB y CD, los cuales se intersectan en Q. Si $AB + CD = 12$ y $AE + BC = 6$, entonces la suma de los valores enteros de la longitud de AC es:

- A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

PROBLEMA N° 128 (SEMINARIO 2007-I)

Si $n + b = k$ ¿cuál de las siguientes expresiones es correcta?



I. $\frac{a+c}{2} < m+p-k$

II. $a+c+k < m+p$

III. $a+c < m+p+k$

IV. $a+c < \frac{m+p}{2} - k$

- A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) Sólo IV E) I y III

PROBLEMA N° 129 (1er SEMINARIO 2007-II)

En un triángulo ABC se tiene que el ángulo ABC mide 100° . En el exterior del triángulo ABC y en el interior del ángulo

ABC se ubica el punto P. Si $PA = AB$; $m\angle BAP = 60^\circ$ y $m\angle APC = 160^\circ$. Calcule $m\angle PAC$.

- A) 10° B) 12° C) 8°
D) 15° E) 16°

PROBLEMA N° 130 (1er SEMINARIO 2007-I)

En el triángulo MNP se cumple: $m\angle MNP = 21^\circ$ y $PM > NP$. Entonces el mínimo valor entero para la medida del ángulo NPM es:

- A) 159° B) 119° C) 149°
D) 129° E) 139°

PROBLEMA N° 131 (1er SEMINARIO 2007-I)

Dado un triángulo ABC tal que $AB < AC$, se toma sobre AC el punto D, tal que $AD = AB$ y resulta que D equidista de B y C. Halle $m\angle B$ en función de $m\angle C$.

- A) $m\angle C$ B) $2(m\angle C)$ C) $3(m\angle C)$
D) $\frac{3}{2}(m\angle C)$ E) $\frac{1}{2}(m\angle C)$

PROBLEMA N° 132 (1er SEMINARIO 2007-I)

En el triángulo ABC se trazan las bisectrices exteriores desde los vértices A y B, que se intersectan con las prolongaciones de las bisectrices interiores de los vértices B y A respectivamente en los puntos P y Q.

Si $m\angle ABC = 2(m\angle BCA) = \alpha$, entonces la medida del ángulo agudo que determinan las rectas AQ y BP es:

- A) $90^\circ - \frac{\alpha}{3}$ B) $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ C) $90^\circ - \frac{2}{3}\alpha$
D) $90^\circ - \frac{\alpha}{4}$ E) $90^\circ - \frac{3}{4}\alpha$

PROBLEMA N° 133 (1er SEMINARIO 2007-I)

En un triángulo ABC se ubica un punto interior P, tal que la suma de (PA + PB + PC) es un número entero. Calcule dicha suma en m si AB = 1,2m; BC = 1,6m y AC = 1,5m.

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

PROBLEMA N° 134 (1er SEMINARIO 2007-I)

En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior BD. Si $m\angle BAC = 2(m\angle BCA)$; $BC = 8u$ y $AD = 3u$, entonces la longitud de AB (en u) es:

- A) 2 B) 1 C) 5
D) 3 E) 6

PROBLEMA N° 135 (1er SEMINARIO 2007-II)

En un triángulo ABC (recto en B), se traza la altura BH. La bisectriz del ángulo BAC interseca a la altura BH en M y al cateto BC en P. Entonces el triángulo MBP es:

- A) Equilátero B) Obtuso C) Isósceles
D) Escaleno E) Rectángulo

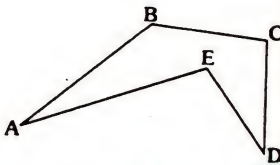
PROBLEMA N° 136 (1er SEMINARIO 2007-II)

En un triángulo isósceles ABC ($AB = BC$), se traza la bisectriz interior AD. Si $AD = 16u$, entonces la menor longitud entera del segmento CD es:

- A) 7u B) 8u C) 9u
D) 10u E) 11u

PROBLEMA N° 137 (1er SEMINARIO 2006-II)

En el gráfico demostrar:



PROBLEMA N° 138 (1er SEMINARIO 200-I)

En un triángulo ABC, las bisectrices interior de A y exterior de C, se intersecan en E; las bisectrices de los ángulos ABC y AEC, se intersecan en Q y determinan los puntos F y J en AC. Demostrar que el triángulo FQJ es isósceles.

PROBLEMA N° 139 (SEMINARIO 2007-III)

En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior BD. Si $m\angle BAC > m\angle BCA$.

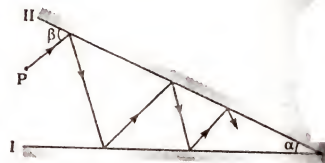
Demostrar:

$$m\angle BDC - m\angle BDA = m\angle BAC - m\angle BCA$$

PROBLEMA N° 140 (1er SEMINARIO 2007-II)

En la figura se muestran dos espejos planos I y II que forman un ángulo que mide α . Desde el punto P sale un rayo de luz que incide sobre el espejo II bajo un ángulo que mide β . Calcule la medida del ángulo de incidencia del rayo de luz sobre el espejo I cuando incide por tercera vez sobre este espejo. Considere que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

- A) $6\alpha - \beta$
B) $4\alpha - \beta$
C) $3\alpha + \beta$
D) $6\alpha + \beta$
E) $5\alpha + \beta$



Problemas Resueltos

Ciclo Semestral

PROBLEMA N° 141

Dado el triángulo equilátero ABC y P un punto en la región interior. Si $AP = 2$ y $PC = 7$, calcule el mayor valor entero de PB.

- A) 11 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

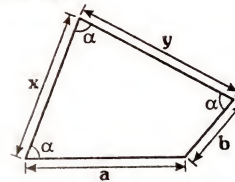
PROBLEMA N° 142

En un triángulo rectángulo ABC se trazan las bisectrices interiores AP y CQ que cortan a la altura BH en M y N respectivamente. Si $BP = a$ y $BQ = b$, ($a > b$) calcule MN.

- A) $\frac{a+2}{2}$ B) \sqrt{ab} C) $a-b$
D) $\frac{b}{2}$ E) $\frac{a-b}{2}$

PROBLEMA N° 143

En el gráfico, $\alpha < 90^\circ$, indica entre que valores está xy.

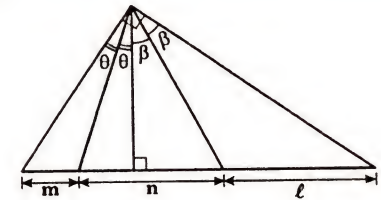


- A) $\langle ab; (a+b)^2 \rangle$ B) $\langle 2ab; \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \rangle$

- C) $\langle ab; (a^2 + b)^2 \rangle$ D) $\langle \frac{ab}{2}; 2(a+b)^2 \rangle$
E) $\langle \frac{ab}{4}; 2(a+b)^2 \rangle$

PROBLEMA N° 144

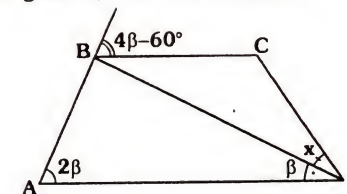
En el gráfico, indique la relación correcta:



- A) $\ell = m + n$ B) $n^2 = m\ell$
C) $n^2 = 2m\ell$ D) $\ell^2 = m^2 + n^2$
E) $\ell = \sqrt{mn}$

PROBLEMA N° 145

En el gráfico, $AB = BC$ calcule x.



- A) 30° B) $\frac{45^\circ}{2}$ C) 15°
D) $30^\circ + \beta$ E) $30^\circ - \beta$

PROBLEMA N° 146

En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la ceviana interior BD, tal que:
 $2(m\angle DBC) = 3(m\angle BAC)$ y $AB = DC + BC$

Calcule $m\angle BAC$.

- A) 18° B) 30° C) 36°
 D) 15° E) 32°

PROBLEMA N° 147

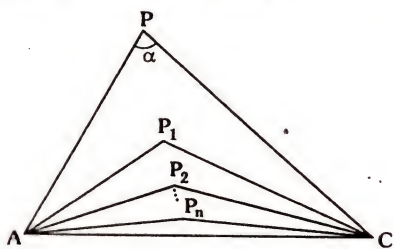
En un triángulo ABC, se ubica P en \overline{AB} y Q en la prolongación de \overline{AC} . Si las bisectrices exteriores trazadas desde B y Q, en los triángulos ABC y APQ respectivamente se cortan en T; $\overline{PQ} \cap \overline{BC} = \{R\}$ y $m\angle BAC - m\angle PRB = 20^\circ$.

Calcule $m\angle BTQ$.

- A) 10° B) 40° C) 80°
 D) 20° E) 70°

PROBLEMA N° 148

En el gráfico, en el triángulo APC, $\overline{AP_1}$ y $\overline{CP_1}$ son bisectrices trazadas de A y C; en el triángulo AP_1C , $\overline{AP_2}$ y $\overline{CP_2}$ son bisectrices trazadas de A y C y así sucesivamente. Calcule $m\angle AP_nC$.



- A) $90^\circ - \frac{1}{2^n} \alpha$ B) $90^\circ \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} \alpha$

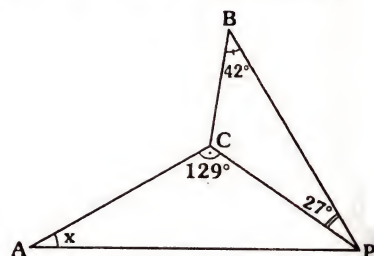
C) $180^\circ \left(1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \alpha$

D) $180^\circ \left[1 - \frac{1}{2^n}\right] + \frac{1}{2^n} \alpha$

E) $90^\circ \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{\alpha}{n}$

PROBLEMA N° 149

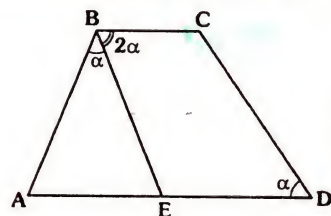
En el gráfico, $BP = AC$, calcule x.



- A) 30° B) 21° C) 27°
 D) 32° E) 42°

PROBLEMA N° 150

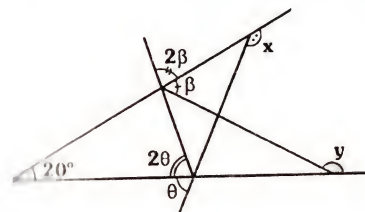
En el gráfico, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y $AB = ED$, calcule el menor valor entero de α .



- A) 35° B) 36° C) 37°
 D) 44° E) 41°

PROBLEMA N° 151

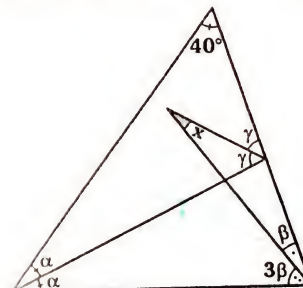
Del gráfico, calcule $x + y$.



- A) 320° B) 160° C) 200°
 D) 180° E) 220°

PROBLEMA N° 152

Del gráfico, calcule x.

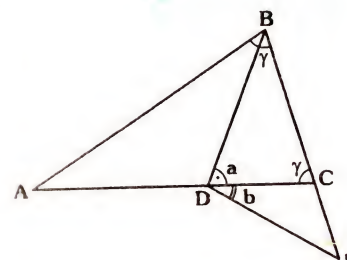


- A) 10° B) 30° C) 20°
 D) 35° E) 25°

PROBLEMA N° 153

En el gráfico, $AD = DB = DE$. Calcule $\frac{a}{b}$

- A) 1
 B) 2
 C) 3
 D) 2
 E) 3



PROBLEMA N° 154

En un triángulo un lado mide 10, calcule el menor valor entero del perímetro de la región triangular.

- A) 11 B) 12 C) 20
 D) 19 E) 21

PROBLEMA N° 155

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior CE y en AC se ubica D.

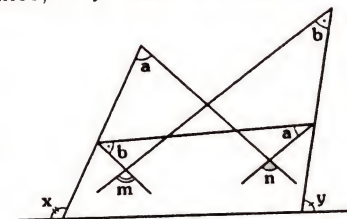
Si $m\angle ABC = 100^\circ$, $m\angle BAC = 20^\circ$, $AE = EC$ y $EB = CD$. Calcule $m\angle AED$

- A) 100° B) 105° C) 120°
 D) 115° E) 110°

PROBLEMA N° 156

En el gráfico, $x + y = 220^\circ$. Calcule $m + n$

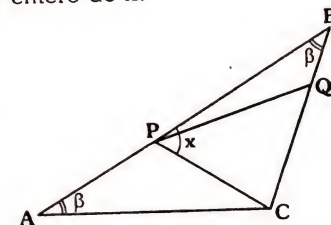
- A) 120°
 B) 180°
 C) 140°
 D) 150°
 E) 160°



PROBLEMA N° 157

En el gráfico, $PB = QC$. Calcule el menor valor entero de x.

- A) 44° B) 61° C) 59°
 D) 46° E) 48°



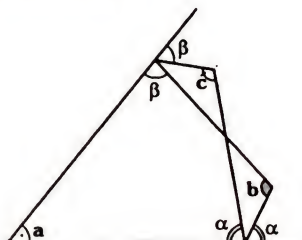
PROBLEMA N° 158

En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior \overline{BP} , se ubica Q en \overline{BC} , tal que $AP = BQ$. Calcule el menor valor entero de $m\angle BQA$, si $m\angle ABC = 40^\circ$.

- A) 61° B) 71° C) 69°
D) 59° E) 89°

PROBLEMA N° 159

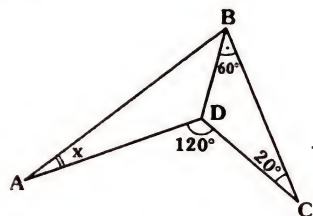
En el gráfico, se cumple :
 $ma + nb + pc = 360^\circ$; donde m, n y $p \in \mathbb{Z}^+$
Calcule $m + n + p$



- A) 5 B) 4 C) 3
D) 6 E) 2

PROBLEMA N° 160

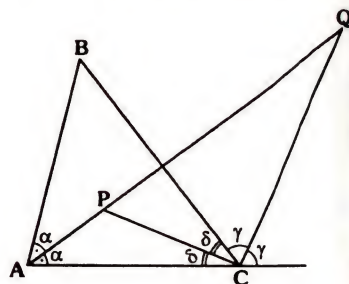
En el gráfico, $AD = BC$.
Calcule x .



- A) 8° B) 10° C) 12°
D) 18° E) 15°

PROBLEMA N° 161

En el gráfico, el triángulo ABC es acutángulo y $CQ = 7$. Calcule PQ, cuando PC toma su mayor valor entero.



- A) $\sqrt{85}$ B) $\sqrt{75}$ C) 10
D) 8 E) 9

PROBLEMA N° 162

En el triángulo obtusángulo ABC (obtusó en B) se traza la ceviana interior BM tal que el triángulo AMB es obtuso en M. Si $AB + AC = 10$. Calcule el mayor valor entero de AZ (\overline{AZ} es ceviana interior del triángulo AMB).

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 2 E) 6

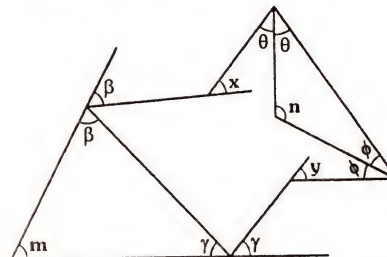
PROBLEMA N° 163

El perímetro de una región triangular es k ($k \in \mathbb{Z}^+$). Calcule el mayor valor entero del perímetro de la región triangular cuyos vértices están en los lados del triángulo inicial.

- A) k B) $2k - 3$ C) $k - 1$
D) $2k$ E) $k + 1$

PROBLEMA N° 164

En el gráfico, $n - m = 60^\circ$, calcule $x + y$.



- A) 80° B) 140° C) 120°
D) 100° E) 130°

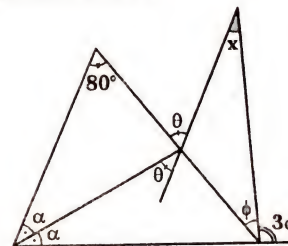
PROBLEMA N° 165

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BM y en el triángulo BMC se traza la ceviana interior MN tal que $AB = BM = MN = NC$. Si $m\angle ACB$ es máximo entero, calcule $m\angle BAC$.

- A) 66° B) 58° C) 61°
D) 62° E) 87°

PROBLEMA N° 166

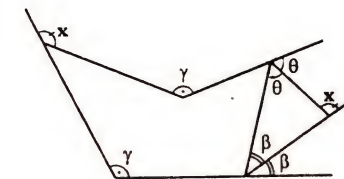
Del gráfico, calcule x .



- A) 40° B) 50° C) 30°
D) 20° E) 25°

PROBLEMA N° 167

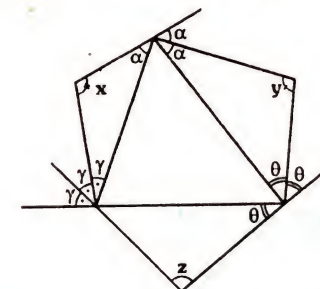
Del gráfico, calcule x .



- A) 90° B) 120° C) 135°
D) 100° E) 108°

PROBLEMA N° 168

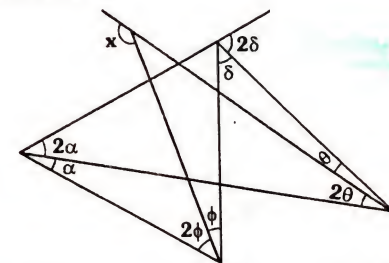
En el gráfico, calcule $x + y + z$



- A) 300° B) 240° C) 270°
D) 320° E) 450°

PROBLEMA N° 169

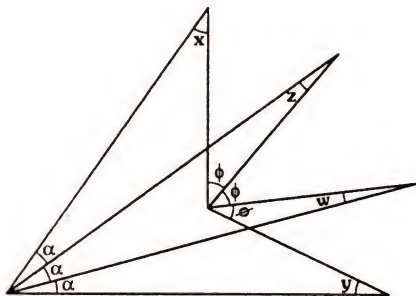
En el gráfico, $\alpha + \theta = 25^\circ$.
Calcule x .



- A) 165° B) 175° C) 145°
D) 155° E) 140°

PROBLEMA N° 170

Del gráfico, calcule $\frac{x+y}{z+w}$



- A) 1 B) 3 C) 2
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

PROBLEMA N° 171

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BF, tal que $AB=4$;

$$m\angle BAC = 2(m\angle ACB)$$

$$m\angle FBC = 3(m\angle ACB)$$

Calcule el valor entero de BF.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 4

PROBLEMA N° 172

En una región triangular isósceles se cumple que el perímetro es mayor que el triple de su base. Calcule el mayor valor entero de la medida del menor ángulo interior.

- A) 44° B) 59° C) 89°
D) 61° E) 58°

PROBLEMA N° 173

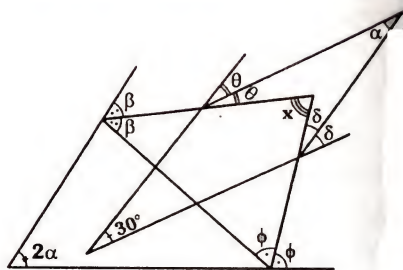
En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y BN, las cuales se cortan en L. Si $AM=MC$, $AB=BN$ y $m\angle MLN = 2(m\angle ABC)$.

Calcule $m\angle ABC$.

- A) 30° B) 60° C) 45°
D) 36° E) 72°

PROBLEMA N° 174

En el gráfico, calcule x.



- A) 45° B) 60° C) 80°
D) 70° E) 50°

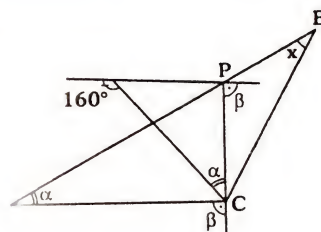
PROBLEMA N° 175

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), la altura BH y la ceviana interior CD se cortan en Q. Si $AD=DC$ calcule el mayor valor entero de $m\angle BQC$.

- A) 91° B) 136° C) 121°
D) 134° E) 119°

PROBLEMA N° 176

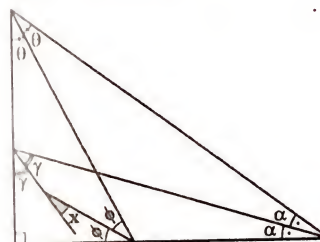
En el gráfico, $PB=PC$, calcule x.



- A) 40° B) 50° C) 30°
D) 10° E) 20°

PROBLEMA N° 177

Del gráfico, calcule x.



- A) 15° B) 30° C) 45°
D) $45/2$ E) $53/2$

PROBLEMA N° 178

En el triángulo isósceles ABC de base AC, se traza la ceviana interior CD y la bisectriz exterior DE del triángulo ADC. Si $m\angle DCE = 19^\circ$. Calcule $m\angle DCB$

- A) 38° B) 19° C) 79°
D) 61° E) 69°

PROBLEMA N° 179

Se tiene un triángulo equilátero ABC, en AC y en la región exterior relativa a BC se ubican P y Q respectivamente, de tal manera que el triángulo BPQ es isósceles

de base BP, si $BQ \parallel PC$ y $BP=BR$.

Calcule $m\angle ABP$ ($PQ \cap BC = \{R\}$)

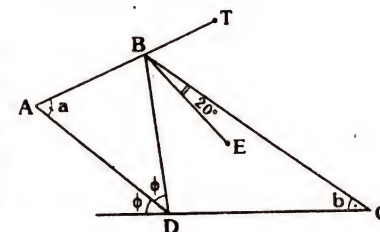
- A) 30° B) 40° C) 50°
D) 32° E) 36°

PROBLEMA N° 180

En el gráfico, calcule a - b, si $\overline{BE} \parallel \overline{AD}$ y

$$m\angle EBT = m\angle EBD$$

- A) 10°
B) 20°
C) 40°
D) 30°
E) 25°



PROBLEMA N° 181

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AM, en cuya prolongación se ubica D. Si $BD=DC$ y

$$3(m\angle DAC) = 2(m\angle BCA) = 6(m\angle BCD) = 60^\circ$$

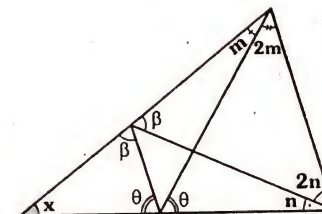
Calcule $m\angle BAD$.

- A) 45° B) 36° C) 30°
D) 20° E) 18°

PROBLEMA N° 182

En el gráfico, calcule x.

- A) 36°
B) 60°
C) 45°
D) 30°
E) 54°



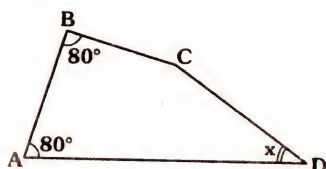
PROBLEMA N° 183

En el triángulo ABC ($m\angle ABC = 90^\circ$) se traza la altura BH y en ella se ubica P . Si $AC + AB = 10$, calcule el mayor valor entero de AP .

- A) 4 B) 3 C) 5
D) 9 E) 6

PROBLEMA N° 184

En el gráfico, $AD > AB$ y $AB = BC = CD$. Calcule x .



- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 50° E) 40°

PROBLEMA N° 185

En el triángulo ABC , se ubican en \overline{AB} y en las regiones exteriores y relativas a \overline{BC} y \overline{AC} los puntos P , Q y R respectivamente. Si $\overline{AC} \cap \overline{QR} = \{M\}$;

$$m\angle BPQ = m\angle QMC;$$

$$m\angle RAC + m\angle BAR = 180^\circ \text{ y}$$

$$m\angle MRA = 64^\circ$$

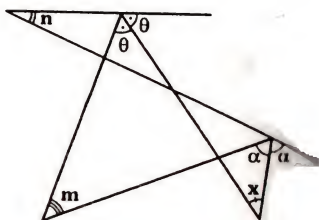
Calcule $m\angle PQR$.

- A) 64° B) 56° C) 52°
D) 60° E) 32°

PROBLEMA N° 186

En el gráfico, $m + n = 60^\circ$. Calcule x .

- A) 20°
B) 30°
C) 45°
D) 60°
E) 50°



PROBLEMA N° 187

En los lados AB , BC y AC del triángulo ABC se ubican los puntos P , Q y R respectivamente. Si $AR = RP$; $CR = RQ$ y $m\angle PRQ = 80^\circ$. Calcule la medida del ángulo entre las bisectrices de los ángulos APQ y PQC .

- A) 56° B) 40° C) 64°
D) 65° E) 50°

PROBLEMA N° 188

En el triángulo ABC se trazan la ceviana interior BP y la ceviana exterior BQ (Q en la prolongación de \overline{CA}).

$$\text{Si } m\angle BCA = 2(m\angle BQA) = 20^\circ;$$

$$BC = AP + AB \text{ y } QA = BC + AB$$

Calcule $m\angle CBP$.

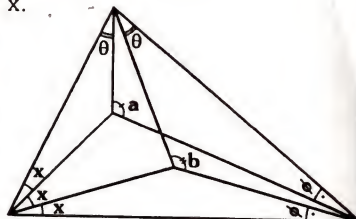
- A) 10° B) 40° C) 60°
D) 20° E) 30°

PROBLEMA N° 189

En el gráfico, $a + b = 210^\circ$

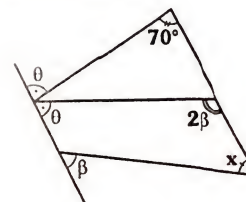
Calcule x .

- A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 20°
E) 18°



PROBLEMA N° 190

Del gráfico, calcule x .



- A) 70° B) 35° C) 40°
D) 55° E) 65°

PROBLEMA N° 191

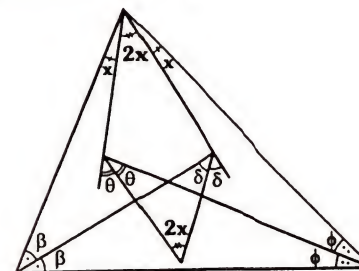
En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y CN de modo que $m\angle BNC = m\angle AMC$. Si la medida del menor ángulo determinado por las bisectrices de los ángulos ANC y AMC es igual a la medida del ángulo ABC .

Calcule $m\angle CBA$.

- A) 36° B) 54° C) 60°
D) 45° E) 37°

PROBLEMA N° 192

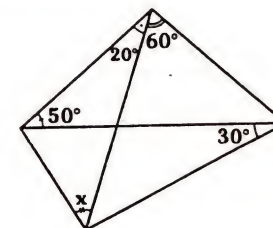
Del gráfico, calcule x .



- A) 28° B) $\frac{45^\circ}{2}$ C) 24°
D) 20° E) 10°

PROBLEMA N° 193

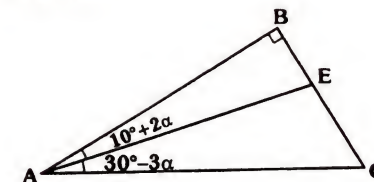
Del gráfico, calcule x .



- A) 20° B) 40° C) 30°
D) 25° E) 35°

PROBLEMA N° 194

En el gráfico, $BE = a$ y $EC = b$. Calcule AE .

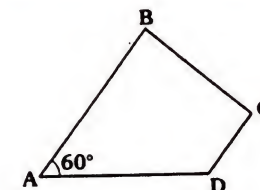


- A) $a + b$ B) $2a + b$ C) $2a - b$
D) $a + 2b$ E) $2b - a$

PROBLEMA N° 195

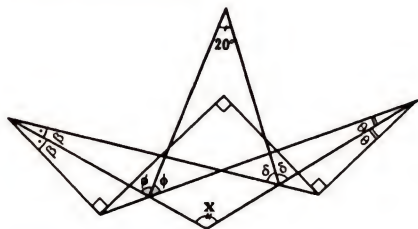
En el gráfico, $AB = AD = 17$, $CD = 8$ y el ángulo BCD es obtuso. Indique la cantidad de valores enteros para BC .

- A) 1
B) 5
C) 3
D) 0
E) 4



PROBLEMA N° 196

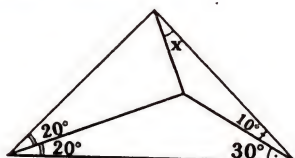
Del gráfico, calcule x .



- A) 160° B) 140°
C) 130°
D) 155° E) 150°

PROBLEMA N° 197

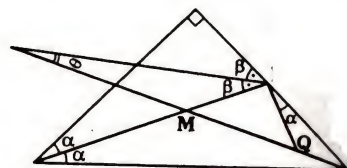
Del gráfico, calcule x .



- A) 5° B) $7,5^\circ$
C) 10°
D) 20° E) 15°

PROBLEMA N° 198

En el gráfico, $MP = PQ$. Calcule $\frac{\alpha}{\theta}$



- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$
D) 2 E) $\frac{1}{3}$

PROBLEMA N° 199

En un triángulo ABC se ubica P en la región interior, tal que $AP = AB = PC$ y

$$\frac{m\angle PCB}{3} = \frac{m\angle PAC}{2} = \frac{m\angle ABC}{13}$$

Calcule $m\angle PAC$.

- A) 10° B) 12° C) 20°
D) 18° E) $22,5^\circ$

PROBLEMA N° 200

El perímetro de un triángulo rectángulo es 30. ¿Cuántos valores enteros puede tener la longitud de la hipotenusa?

- A) 0 B) 3 C) 2
D) 4 E) 5



Problemas Resueltos

Ciclo Semestral Intensivo

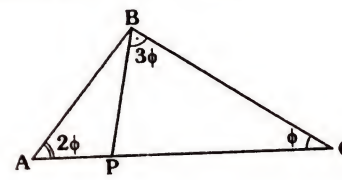
PROBLEMA N° 201

Se tiene un triángulo en el cual un lado mide 1 y la medida del mayor ángulo exterior es β . Si las longitudes de los lados son enteras calcule la medida del menor ángulo exterior.

- A) β B) $360^\circ - 2\beta$
C) $90^\circ - \beta$ D) $180^\circ - \frac{\beta}{2}$
E) $180^\circ - \beta$

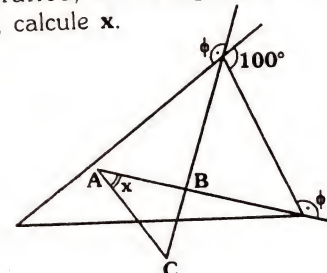
PROBLEMA N° 202

En el gráfico, $PC = 18$, indique cuántos valores enteros puede tener AB.



PROBLEMA N° 203

En el gráfico, el triángulo ABC es isósceles, calcule x .



- A) 50°
B) 40°
C) 65°
D) 45°
E) 80°

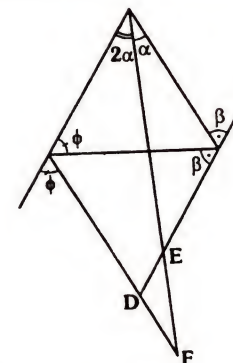
PROBLEMA N° 204

¿Cuántos triángulos de longitudes enteras cuyo perímetro es 40u existen?

- A) 30 B) 32 C) 33
D) 34 E) 35

PROBLEMA N° 205

En el gráfico, $ED = DF$, calcule el mayor valor entero de α .



- A) 44° B) 18° C) 31°
D) 17° E) 29°

PROBLEMA N° 206

En el triángulo ABC, se ubican P y Q en AC y BC respectivamente tal que:

$$AB = BP = PQ = QC$$

$$\text{Si } m\angle ABC = 5(m\angle QPC)$$

Calcule $m\angle QPC$.

- A) 10° B) 18° C) 15°
D) 12° E) 20°

PROBLEMA N° 207

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la ceviana interior BF tal que $AC=16$ y

$$m\angle ABF = 90^\circ - 3(m\angle ACB)$$

Calcule el menor valor entero de BF :

- A) 4 B) 6 C) 5
D) 7 E) 9

PROBLEMA N° 208

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores BD y CP secantes en R, tal que:

$$m\angle PCB = 3(m\angle PBD)$$

$$m\angle DBC = 3(m\angle PCD) \text{ y}$$

$$m\angle DPR = m\angle RDP = m\angle BAC$$

Calcule $m\angle BAC$.

- A) 54° B) 72° C) 36°
D) $\frac{540^\circ}{11}$ E) $\frac{540^\circ}{13}$

PROBLEMA N° 209

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BM de modo que $AM=BC$.

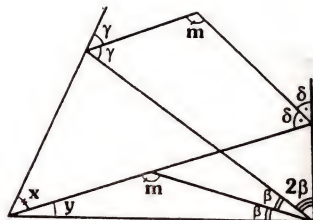
$$\text{Si : } \frac{m\angle BAM}{3} = \frac{m\angle BCM}{2} = 10^\circ$$

Calcule $m\angle CBM$.

- A) 10° B) 15° C) 18°
D) 25° E) 20°

PROBLEMA N° 210

En el gráfico, calcule $\frac{x}{y}$



- A) 1 B) 2 C) 3

- D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

PROBLEMA N° 211

En el triángulo ABC en la región exterior relativa a AC se ubica D, Si $BC=CD$,

$$m\angle BCA = 60^\circ - \theta \text{ y}$$

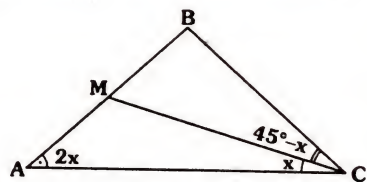
$$m\angle ADC = 2(m\angle CAD) = 2\theta$$

Calcule $m\angle BAC$.

- A) 15° B) 45° C) 30°
D) 37° E) 60°

PROBLEMA N° 212

En el gráfico, $AM=MB$. Calcule x.



- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA N° 213

Se tiene el triángulo ABC, se ubica P en la región exterior relativa a AB, tal que

$$AC=BP, m\angle ACB = 54^\circ,$$

$$m\angle ABC = 3(m\angle ABP) = 99^\circ$$

Calcule $m\angle APC$.

- A) 93° B) 92° C) 90°
D) 91° E) 94°

PROBLEMA N° 214

En el triángulo ABC se ubica P en la región interior. Si $BC=PC=15$ y $AP=8$. Calcule el menor valor entero de AC.

- A) 16 B) 17 C) 18
D) 22 E) 23

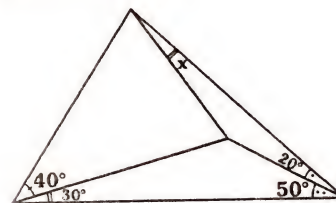
PROBLEMA N° 215

En el triángulo ABC ($m\angle ABC = 90^\circ$) se traza la altura BH y en ella se ubica P. Se ubica T en la región exterior relativa a AC, tal que $m\angle ACT = 90^\circ$. Si $AP=2$ y $AT=6$. Calcule el valor entero de BM, siendo M punto medio de AC.

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA N° 216

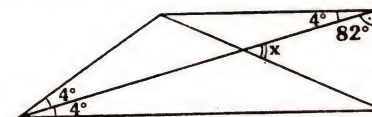
Del gráfico, calcule x.



- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 9° E) 18°

PROBLEMA N° 217

En el gráfico, calcule x.



- A) 8° B) 10° C) 12°
D) 15° E) 9°

PROBLEMA N° 218

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se ubica Q en AC tal que $m\angle QBC = 3x$, $m\angle BAC = 2x$ y $AB=CQ$. Calcule x.

- A) 15° B) 16° C) 18°
D) $22^\circ 30'$ E) $26^\circ 30'$

PROBLEMA N° 219

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BM, tal que $AB=CM$ y

$$\frac{m\angle BAM}{4} = \frac{m\angle BCM}{3} = 10^\circ$$

Calcule $m\angle MBC$.

- A) 30° B) 40° C) 50°
D) 35° E) 55°

PROBLEMA N° 220

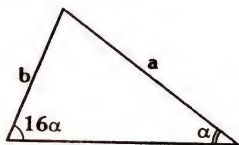
En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BQ tal que $QC=AB$, $m\angle BAC = 20^\circ$ y $m\angle BQC = 30^\circ$.

Calcule $m\angle BCA$.

- A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 70°

PROBLEMA N° 221

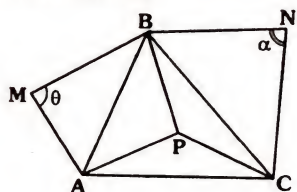
Del gráfico, indique la alternativa correcta:



- A) $a < 16b$ B) $a = 16b$
C) $a > 16b$ D) $b < 16a$
E) $b > 16a$

PROBLEMA N° 222

En el gráfico $MB = NC = 12$, $AC = 15$, $BN = 9$, $\alpha < 90^\circ$ y $\theta > 90^\circ$. Si AB y BC toman su menor y mayor valor entero respectivamente. Calcule el mayor valor entero de $PA + PB + PC$.



- A) 39 B) 40 C) 41
D) 27 E) 38

PROBLEMA N° 223

En el triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores \overline{AM} y \overline{CN} , las cuales se cortan en I , las bisectrices de los ángulos ANC y AIC se cortan en P , de modo que $m\angle IAC = m\angle ICA + m\angle NPI$. Si la medida del menor ángulo entre \overline{PI} y \overline{BC} es 40° . Calcule $m\angle ABC$.

- A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 50°

PROBLEMA N° 224

Dado el triángulo ABC , se ubica D y F en \overline{AB} y \overline{BC} respectivamente. Si $AD = AC$ y $m\angle DAF = \frac{m\angle FAC}{5} = \frac{m\angle ABC}{4} = 10^\circ$. Calcule $m\angle DFA$.

- A) 20° B) 30° C) 35°
D) 25° E) 45°

PROBLEMA N° 225

En el triángulo ABC , se traza una recta que corta a \overline{BC} , \overline{AB} y a la prolongación de \overline{CA} en S , Q y P respectivamente.

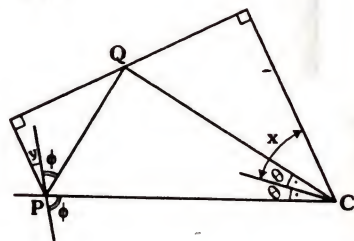
Si: $m\angle BAC = m\angle BSQ = 2(m\angle ACB)$ y

$SC - PQ = QB$. Calcule $m\angle ACB$

- A) 30° B) 36° C) 72°
D) 60° E) 45°

PROBLEMA N° 226

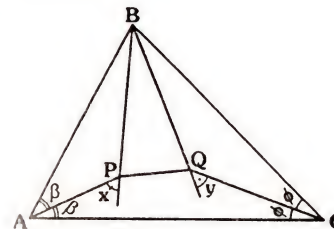
Del gráfico, calcule $m\angle PQC$ en función de x e y .



- A) $x + y$ B) $2(x + y)$
C) $\frac{(x + y)}{2}$ D) $180^\circ - \frac{(x + y)}{2}$
E) $90^\circ - \frac{(x + y)}{2}$

PROBLEMA N° 227

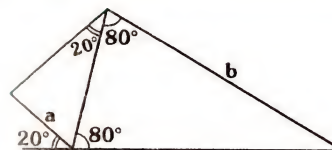
En el gráfico, $m\angle ABC - 2(m\angle PBQ) = 20^\circ$. Calcule $x + y$.



- A) 100° B) 105° C) 120°
D) 110° E) 115°

PROBLEMA N° 228

En el gráfico, indique el intervalo para $\frac{b}{a}$



- A) $(8; 10)$ B) $[1; 3)$ C) $(2; 3)$
D) $(4; 9)$ E) $(3; 6)$

PROBLEMA N° 229

Se tiene el triángulo ABC , P es un punto interior y S es exterior y relativo a \overline{AC} , tal que $\overline{PS} \cap \overline{AC} = \{L\}$,

$$m\angle PLC - m\angle PLA = 20^\circ$$

$$\text{Si } \frac{m\angle BAP}{m\angle PAC} = \frac{m\angle BCP}{m\angle PCA} = 4 \text{ y}$$

$$\frac{m\angle ABS}{m\angle SBC} = \frac{m\angle APS}{m\angle SPC} = 1$$

Calcule $m\angle BSP$

- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 60°

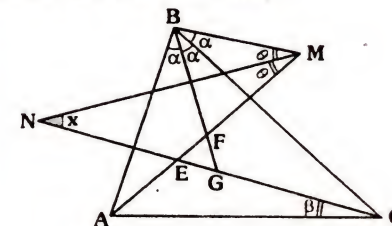
PROBLEMA N° 230

En el gráfico, $EF = EG$,

$$m\angle CAM = 3(m\angle MAB) \text{ y}$$

$$m\angle BCN = 3(m\angle NCA)$$

Calcule x en función de β .



- A) β B) $45^\circ + \beta$ C) $90^\circ - \frac{\beta}{2}$
D) $45^\circ - \frac{\beta}{2}$ E) $60^\circ - \beta$

PROBLEMA N° 231

Se ubica P en la región interior del triángulo equilátero ABC , tal que $AP = 2$ y $PC = 7$. Calcule la razón entre los perímetros máximo y mínimo enteros del triángulo ABC .

- A) $13/11$ B) $12/11$ C) $4/3$
D) $6/5$ E) $7/6$

PROBLEMA N° 232

En el triángulo ABC , se ubica M y N en \overline{AB} y \overline{BC} respectivamente. Si $14(m\angle NAM) = 7(m\angle NAC) = 2(m\angle ACB)$. $AM = MN = NC$. Calcule $m\angle ABC$.

- A) 36° B) 18° C) 24°
D) 30° E) 27°

PROBLEMA N° 233

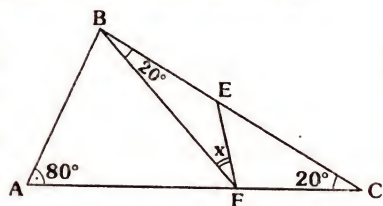
En el triángulo ABC ($AB = BC$), las cevianas interiores AQ y CP se intersectan en L , tal que $m\angle AQC = 2(m\angle ACP)$, entonces se puede afirmar:

- A) $AL > AP$ B) $AL > PL$
C) $AL < AP$ D) $AP = AL$
E) $LP = AP$

PROBLEMA N° 234

En el gráfico, $AB = BE$. Calcule x .

- A) 15°
B) 20°
C) 30°
D) 25°
E) 18°



PROBLEMA N° 235

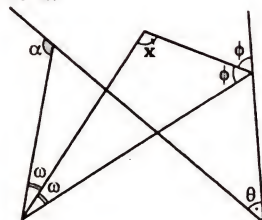
Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se ubica E en \overline{AB} y G en la prolongación de \overline{BC} . Si $\overline{EG} \cap \overline{AC} = \{F\}$ y los triángulos AEF y FCG son isósceles. Calcule $m\angle GEB$.

- A) 30° B) 60° C) 45°
D) 50° E) 37°

PROBLEMA N° 236

En el gráfico, $\alpha + \theta < 170^\circ$. Calcule el menor valor entero de x .

- A) 90°
B) 94°
C) 98°
D) 96°
E) 97°



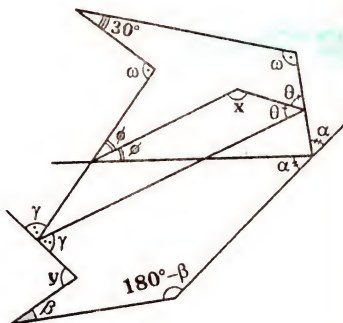
PROBLEMA N° 237

Se tiene el triángulo isósceles ABC de base \overline{AC} , una recta corta a \overline{BC} , \overline{AC} y a la prolongación de \overline{BA} en P , Q y R respectivamente. Si $m\angle BPQ = a$ y $m\angle AQR = b$. Calcule $m\angle BRP$.

- A) $a - b$ B) $a + b$ C) $2a - b$
D) $a - 2b$ E) $3a - b$

PROBLEMA N° 238

Del gráfico calcule $x + y$.



- A) 240° B) 215° C) 190°
D) 210° E) 220°

PROBLEMA N° 239

En el triángulo ABC se ubica P en la región interior tal que:

$$\frac{m\angle PCA}{4} = \frac{m\angle PAC}{3} = \frac{m\angle PAB}{2} = m\angle PCB = 10^\circ$$

Calcule $m\angle PBC$.

- A) 28° B) 20° C) 15°
D) 30° E) 10°

PROBLEMA N° 240

En el triángulo ABC se ubican P y Q (Q en \overline{PC}) en la región exterior relativa a \overline{BC} se ubican M y N tal que \overline{BM} y \overline{CN} son parte de las bisectrices exteriores trazadas desde B y C . Si \overline{AQ} es bisectriz interior, $\overline{AQ} \parallel \overline{MP}$ y $\overline{NP} \parallel \overline{AC}$.

Calcule $m\angle BMP + m\angle PNC$.

- A) 45° B) 60° C) 75°
D) 120° E) 90°

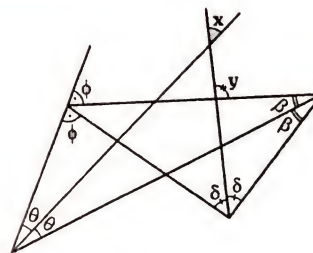
PROBLEMA N° 241

La bisectriz interior trazada en un triángulo escaleno determina con el lado opuesto ángulos cuya razón de medidas es $7/13$. Si los tres ángulos interiores son menores que 80° . Calcule la medida del menor ángulo interior del triángulo dado.

- A) 79° B) 78° C) 25°
D) 24° E) 76°

PROBLEMA N° 242

Del gráfico, calcule $\frac{x}{y}$.



- A) 2 B) 3 C) $2/3$
D) $1/2$ E) 3

PROBLEMA N° 243

Se tiene el triángulo ABC ($AB = BC$), se

se ubican S y K en las prolongaciones de \overline{BA} y \overline{BC} respectivamente. Si \overline{CS} divide al ángulo $\angle ACK$ en la razón de 2 a 3. Calcule el mayor valor entero de $m\angle ABC$.

- A) 77° B) 74° C) 76°
D) 68° E) 60°

PROBLEMA N° 244

Se tiene el triángulo ABE , en la prolongación de \overline{AE} se ubica C , luego ubicamos D en \overline{AB} . Si $m\angle BEC = 120^\circ$ y $AB = AC = CD$.

Calcule la cantidad de valores enteros para $m\angle ABE$.

- A) 18 B) 17 C) 29
D) 19 E) 28

PROBLEMA N° 245

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AB , OQ y BR , tal que $AP = CQ = BR$, si " p " es el semiperímetro de la región ABC , indique el intervalo para CQ .

- A) $\left(\frac{p}{3}; p\right)$ B) $\left(\frac{p}{2}; 2p\right)$ C) $[p; 3p)$
D) $(p; 3p)$ E) $\left[\frac{p}{3}; 2p\right)$

PROBLEMA N° 246

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B) se traza la ceviana interior AQ . Si $BQ = 2$, $QC = 3$ y

$$2(m\angle CAQ) + 3(m\angle BAQ) = 90^\circ$$

Calcule AQ .

- A) 8 B) 7 C) 5
D) 4 E) 6

PROBLEMA N° 247

En la región exterior relativa a \overline{AC} del triángulo ABC, se ubica D tal que

$$\frac{m\angle ABD}{6} = \frac{m\angle ADB}{15} = \frac{m\angle BDC}{14} = \frac{m\angle DBC}{8} = 5^\circ$$

Calcule la medida del ángulo entre \overline{BD} y \overline{AC} .

- A) 60° B) 75° C) 90°
D) 80° E) 85°

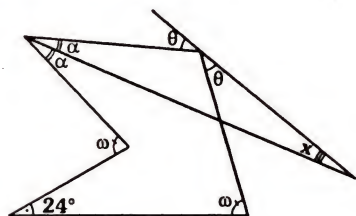
PROBLEMA N° 248

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BN y en el triángulo ANB se traza la ceviana interior NM. Si $2(m\angle BNC) = 3(m\angle MNB)$, $AM = AN$ y $NB = BC$. Calcule el número de valores enteros de $m\angle BNM$.

- A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

PROBLEMA N° 249

Del gráfico, calcule x .

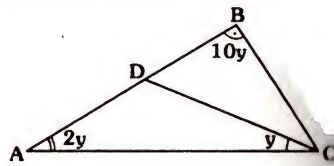


- A) 10° B) 24° C) 18°
D) 36° E) 12°

PROBLEMA N° 250

En el gráfico, $AD = BC$, calcule y .

- A) 5°
B) 10°
C) 8°
D) 15°
E) 6°



PROBLEMA N° 251

En el triángulo ABC se ubica P en la región exterior relativa a \overline{BC} , tal que $AB = c$, $CP = \ell$; $m\angle BAC = 2(m\angle BCA)$ y $m\angle CBP = 2(m\angle BPC)$. Entonces se cumple:

- A) $\ell = 4c$ B) $\ell < c$ C) $4\ell < c$
D) $\ell < 4c$ E) $2\ell < c$

PROBLEMA N° 252

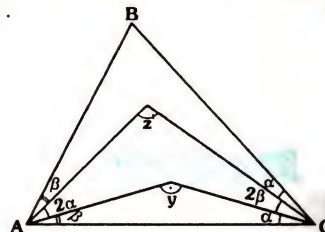
En el triángulo ABC ($AB = BC$) se traza la altura CH y la bisectriz interior AM, tal que $m\angle ABC$ es el doble de la medida del ángulo determinado por las bisectrices de los ángulos HCB y AMB. Calcule $m\angle ABC$.

- A) 30° B) 50° C) 40°
D) 80° E) 60°

PROBLEMA N° 253

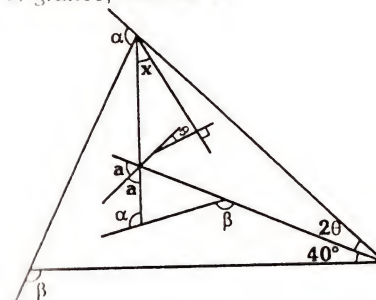
En el gráfico, el triángulo ABC es acutángulo. Calcule el mayor valor entero de $y + z$.

- A) 269°
B) 271°
C) 241°
D) 259°
E) 239°



PROBLEMA N° 254

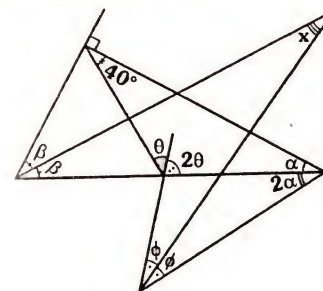
En el gráfico, calcule x .



- A) 40° B) 50° C) 30°
D) 25° E) 20°

PROBLEMA N° 255

Del gráfico, calcule x en función de β .

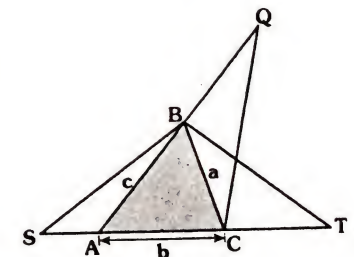


- A) $\frac{320^\circ - 5\beta}{3}$ B) $110^\circ - 3\beta$
C) $\frac{320^\circ - 4\beta}{3}$ D) $\frac{320^\circ - 7\beta}{3}$
E) $\frac{5\beta - 220^\circ}{3}$

PROBLEMA N° 256

En el gráfico, el semiperímetro de la región sombreada es P, si $(BS)(BT)(CQ) = \frac{1}{k^3}$ y k es entero, calcule el menor valor entero de:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}$$

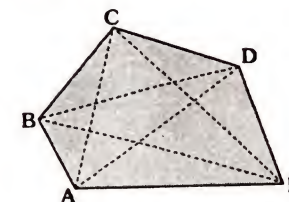


- A) $k-1$ B) $3k-1$
C) $3k+1$ D) $2k-1$
E) $2k+1$

PROBLEMA N° 257

En el gráfico, el perímetro de la región sombreada es ℓ , $AB = a$ y $AE = m$ si $AE > ED > DC > CB > BA$. Indique el intervalo de:

$$AC + BD + CE + DA + EB$$



- A) $\langle m; \ell + a \rangle$ B) $[m - a; 2\ell]$
C) $\langle 2m; 2\ell \rangle$ D) $\langle 2m - 2a; 2\ell \rangle$
E) $\langle m; 2\ell + a \rangle$

PROBLEMA N° 258

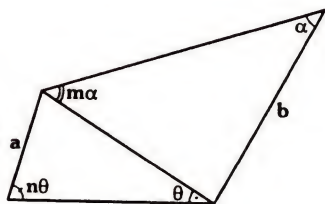
Se tiene el triángulo ABC ($AB = BC$), se ubican M y N en \overline{AB} y \overline{BC} respectiva-

mente tal que $AM = 4$ y $CN = 3$. Calcule el mayor valor entero de $AN + CM$.

- A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 7

PROBLEMA N° 259

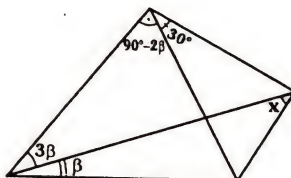
En el gráfico, indique la relación correcta, si n y $m \in \mathbb{Z}^+$.



- A) $b < mna$ B) $a < mn + b$
C) $b > mna$ D) $a > mnb$
E) $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$

PROBLEMA N° 260

Del gráfico, calcule x .



- A) 10° B) 15° C) 30°
D) $22^\circ 30'$ E) 45°

Problemas Resueltos

Ciclo Repaso

PROBLEMA N° 261

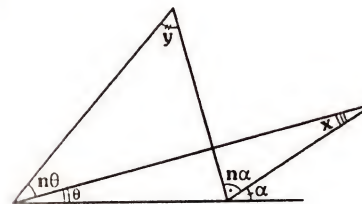
Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Ocho puntos del espacio son vértices como máximo de 56 triángulos.
- II. Si los lados de un triángulo miden 2, $\sqrt{7}$ y 4, entonces dicho triángulo es obtusángulo.
- III. Todo triángulo escaleno es oblicuángulo.

- A) VFF B) VFF C) FFF
D) VVF E) FVF

PROBLEMA N° 262

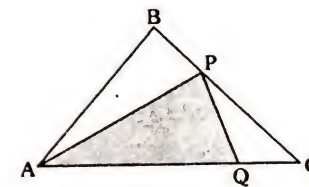
Del gráfico, calcule x .



- A) $\frac{y}{n}$ B) $\frac{y}{n+1}$ C) $\frac{y}{n-1}$
D) $\frac{y}{8-n}$ E) $\frac{y}{2n-1}$

PROBLEMA N° 263

En el gráfico, $AB = BC$ y el perímetro de la región sombreada es 20. Calcule el mayor valor entero de PC .



- A) 10 B) 9 C) 8
D) 7 E) 6

PROBLEMA N° 264

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la ceviana interior BM y en el triángulo BMC se traza la bisectriz interior CN. Si $AB = AM$, calcule $m\angle CNM$.

- A) 30° B) 60° C) 30°
D) 45° E) $22^\circ 30'$

PROBLEMA N° 265

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CP, luego en el triángulo APC se traza la ceviana interior AM en cuya prolongación se ubica N tal que:

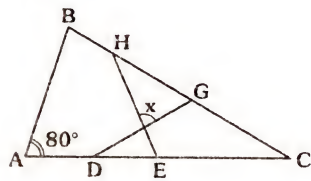
$$m\angle MAP = 3(m\angle MAC); m\angle ABC = 40^\circ \text{ y}$$

$$m\angle BCN = 90^\circ - \frac{3}{4}(m\angle ACB)$$

Calcule $m\angle CNM$

- A) 40° B) 60° C) 50°
D) 45° E) 55°

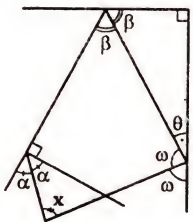
Calcule x .



- A) 70° B) 80° C) 60°
D) 100° E) 90°

PROBLEMA N° 280

Del gráfico, calcule " x " en función de θ .

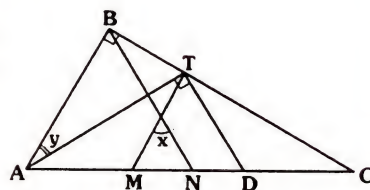


- A) $90^\circ - \frac{2}{3}\theta$ B) $45^\circ + \frac{3}{2}\theta$
C) $45^\circ + \theta$ D) $90^\circ - \frac{3}{2}\theta$
E) $90^\circ - \frac{\theta}{2}$

PROBLEMA N° 281

En el gráfico $MT=MD$ y $BN=NC$.

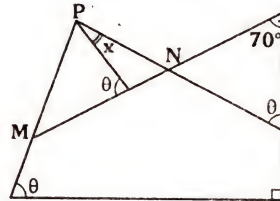
Calcule $\frac{x}{y}$.



- A) 0,5
B) 1,5
C) 1
D) 2
E) 3

PROBLEMA N° 282

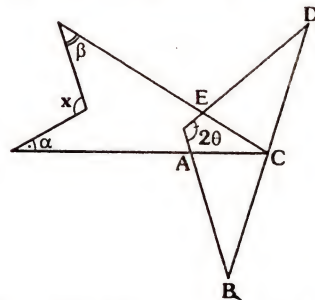
En el gráfico, $MP=PN$, calcule $x + \theta$.



- A) 80° B) 85° C) 95°
D) 120° E) 110°

PROBLEMA N° 283

En el gráfico, $AB=BC$ y $CD=DE$ y $\alpha + \beta - \theta = 70^\circ$. Calcule x .



- A) 160° B) 130° C) 170°
D) 100° E) 110°

PROBLEMA N° 284

En un triángulo isósceles de base BC ($AB > BC$), se traza la bisectriz exterior BP y en el triángulo BPC se traza la bisectriz interior PQ. Si $BP=9$ y $QC=3$. Calcule PC.

- A) 4,5 B) 5,5 C) 6
D) 5 E) 4

PROBLEMA N° 285

En un triángulo ABC, se ubica D en la región interior, tal que $AD=BC$, $m\angle ADC = 120^\circ$, $m\angle DBC = 66^\circ$ y $m\angle DCB = 16^\circ$. Calcule $m\angle ABD$

- A) 40° B) 45° C) 30°
D) 25° E) 20°

PROBLEMA N° 286

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BP y la bisectriz interior CN, de tal manera que los ángulos ABP y ABC son suplementarios. Si $m\angle BNC$ es el mayor valor entero par. Calcule $m\angle BPA$

- A) 8° B) 4° C) 10°
D) 3° E) 2°

PROBLEMA N° 287

En un triángulo ABC, se traza la ceviana interior BP, si $AB=3$, $BC=4$ y AC toma su mayor valor entero, calcule el mayor valor de $(AP)(PC)$.

- A) 36 B) 35 C) 9
D) 12 E) 18

PROBLEMA N° 288

En el triángulo ABC, la altura BH y la bisectriz interior AM se cortan en Q. Si $BQ=BM$, calcule $m\angle ABC$.

- A) 60° B) 120° C) 90°
D) 75° E) 135°

PROBLEMA N° 289

En el triángulo APC, la bisectriz interior desde A y la exterior de C, se cortan en P_1 ; en el triángulo AP_1C , se hace el mis-

mo procedimiento y se encuentra P_2 y así sucesivamente. Si $m\angle APC = \theta$. Calcule la suma límite de las medidas de los menores ángulos en P_1 ; P_2 ; P_3 ...

- A) θ B) 2θ C) $\theta/2$
D) 3θ E) $\theta/4$

PROBLEMA N° 290

En el triángulo ABC, se ubica P y Q en \overline{AC} y \overline{BC} si $AB=AQ=AP$; $PC > PQ$ y $m\angle BAC = 40^\circ$. Calcule el mayor entero de $m\angle PCB$.

- A) 39° B) 41° C) 19°
D) 21° E) 20°

PROBLEMA N° 291

En el triángulo ABC se cumple $m\angle ABC - m\angle BCA = 40^\circ$. Se ubica P en la región interior, tal que:

$$m\angle ABP = 3(m\angle PBC) \quad y$$

$$m\angle ACP = 3(m\angle BCP)$$

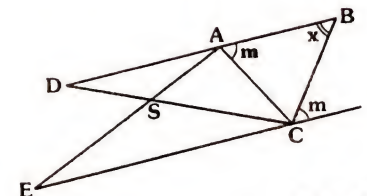
Calcule la medida del ángulo entre las bisectrices de los ángulos BPC y BAC.

- A) 20° B) 30° C) 25°
D) 15° E) 32°

PROBLEMA N° 292

En el gráfico, $AB=BC$, $SD=SA$ y $SE=SC$, calcule x .

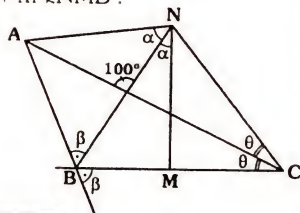
- A) 50°
B) 60°
C) 70°
D) 80°
E) 65°



PROBLEMA N° 293

En el gráfico $m\angle BNC = 2(m\angle NAC)$, calcule $m\angle ABC + m\angle NMB$.

- A) 160°
B) 200°
C) 210°
D) 220°
E) 250°



PROBLEMA N° 294

En el triángulo equilátero ABC se ubica en AB, BC y AC los puntos E, F y D respectivamente si $m\angle EDF = 90^\circ$, $BF = BD$ y $EB = ED$. Calcule $m\angle AED$.

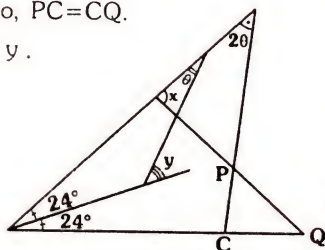
- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 60°

PROBLEMA N° 295

En el gráfico, $PC = CQ$.

Calcule $x + y$.

- A) 104°
B) 108°
C) 148°
D) 138°
E) 152°



PROBLEMA N° 296

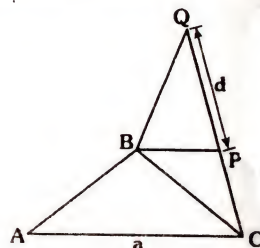
En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y CN de modo que $m\angle BNC = m\angle AMC$. En el triángulo BNC las bisectrices interiores se cortan en I, mientras que en el triángulo AMC la bisectriz interior trazado de A y la exterior trazada de C se cortan en J. Calcule: $m\angle BIC - m\angle AJC$.

- A) 45° B) 90° C) 60°
D) 155° E) 18°

PROBLEMA N° 297

En el gráfico los triángulos ABC; BPC y BQP son isósceles de bases AC, BC y BP respectivamente, indique la relación correcta:

- A) $4a > d$
B) $a < 8d$
C) $2a < d$
D) $4a < d$
E) $8a < d$



PROBLEMA N° 298

En el triángulo ABC, se traza la bisectriz interior AM, en AC se ubica N, tal que $MC = NC$ y $m\angle ABC + m\angle AMN = 150^\circ$. Calcule $m\angle ABC - m\angle NMA$.

- A) 60° B) 50° C) 30°
D) 75° E) 45°

PROBLEMA N° 299

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BM y en su prolongación se ubica D, tal que $AB = BC = CD$. Si $AB \perp CD$, calcule $m\angle CMD$.

- A) 30° B) 36° C) 45°
D) 60° E) 75°

PROBLEMA N° 300

En el triángulo ABD se ubica el punto Q en la región exterior relativa a BD, tal que $AD = DQ$, $m\angle BAQ = 30^\circ$, $m\angle ABD = 18^\circ$ y $m\angle BDQ = 42^\circ$. Calcule $m\angle DBQ$.

- A) 20° B) 15° C) 16°
D) 30° E) 25°

Geometría

SOLUCIONARIO

ANUAL

CEPRE UNI

SEMESTRAL

SEMESTRAL INTENSIVO

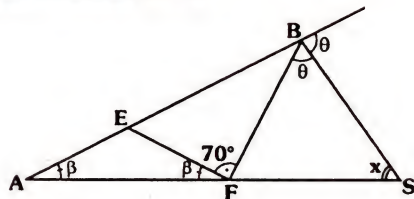
REPASO

TRIÁNGULOS

Solucionario

Ciclo Anual

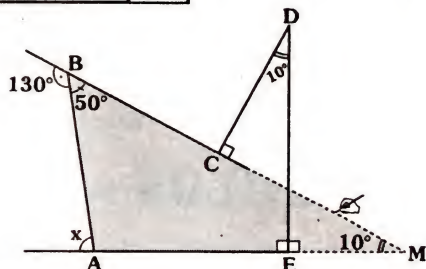
RESOLUCIÓN N° 01



- Se nos pide: x
- Por dato $AE = EF \Rightarrow \triangle AEF$ es isósceles completando ángulos:
 $m\angle EAF = m\angle AFE = \beta$
- Por ángulo exterior:
 En $\triangle ABS$: $x + \beta = \theta$... (I)
 En $\triangle BSF$: $x + \theta = 70^\circ + \beta$... (II)
- Sumando (I) y (II):
 $2x + \theta + \beta = 70^\circ + \theta + \beta$
 $\Rightarrow 2x = 70^\circ$
 $\therefore x = 35^\circ$

Clave C

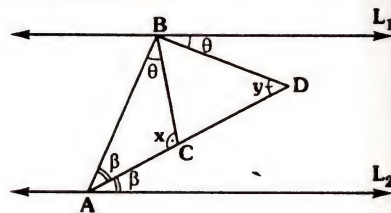
RESOLUCIÓN N° 2



- Se nos pide: x
- Para observar un triángulo donde " x " sea la medida de un ángulo exterior, se prolonga BC y $AE \Rightarrow$ se tiene el $\triangle ABM$.
- En \triangle por teorema:
 $m\angle EMC + 90^\circ = 10^\circ + 90^\circ \Rightarrow m\angle EMC = 10^\circ$
- En $\triangle ABM$, por ángulo exterior:
 $x = 50^\circ + 10^\circ$
 $\therefore x = 60^\circ$

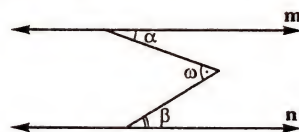
Clave C

RESOLUCIÓN N° 3



- Se nos pide: $x + y$

Recordando:



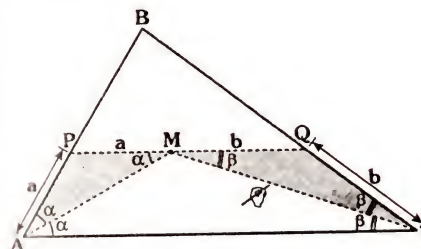
Si $m \parallel n \Leftrightarrow \omega = \alpha + \beta$

- Luego: $y = \theta + \beta$
- En $\triangle ABC$:
 $x + \theta + \beta = 180^\circ$
 $\therefore x + y = 180^\circ$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 4

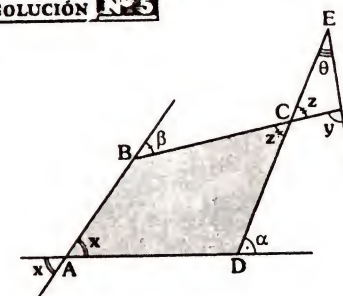
- El primer paso es graficar de acuerdo a las condiciones, para ello lee detenidamente y bosquejalo.
- Así tenemos:



- Se nos pide PQ.
- Dato: $a + b = 6$
- Como $PQ \parallel AC \Rightarrow$ por ángulos alternos internos:
 $m\angle PMA = \alpha$ y $m\angle CMQ = \beta$
- Luego:
 $\triangle APM$ y $\triangle MQC$: isósceles
 $\Rightarrow PM = a$ y $MQ = b$
 $\Rightarrow PQ = a + b$
 $\therefore PQ = 6$

Clave D

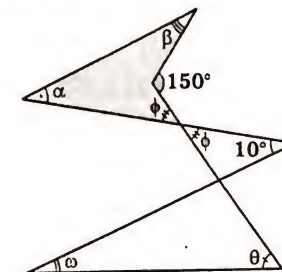
RESOLUCIÓN N° 5



- Se nos pide: $\alpha + \beta + \theta$
- Tenemos como dato: $x + y = 80^\circ$
- En \triangle , por teorema:
 $\alpha + \beta = x + z$... (I)
- En $\triangle CEF$, por ángulo exterior
 $\theta + z = y$... (II)
- Sumando (I) y (II):
 $\alpha + \beta + \theta + z = x + y + z$
 $\Rightarrow \alpha + \beta + \theta = x + y$
 $\therefore \alpha + \beta + \theta = 80^\circ$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 6



- Piden: $\alpha + \beta + \theta + \omega$
- En \triangle : $\alpha + \beta + \phi = 150^\circ$... (I)
- En \triangle : $\omega + \theta = 10^\circ + \phi$... (II)

- Sumando (I) y (II):

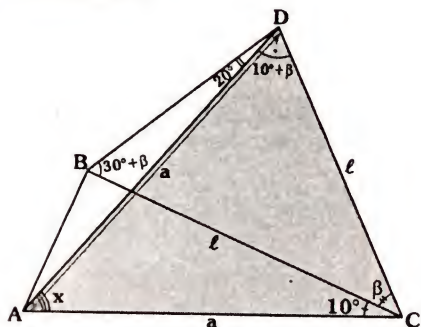
$$\alpha + \beta + \theta + \omega = 150^\circ + 10^\circ$$

$$\therefore \alpha + \beta + \theta + \omega = 160^\circ$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 7

- Graficando:

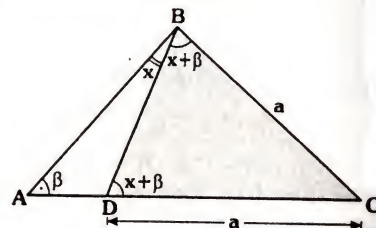


- Piden: x
- Tenemos por dato: $AC = AD$ y $BC = CD$
 $\Rightarrow \triangle ADC$ y $\triangle BCD$: isósceles
- Luego:
 $m\angle ADC = m\angle ACD = 10^\circ + \beta$
 $m\angle BDC = m\angle DBC = 30^\circ + \beta$
- En $\triangle ADC$:
 $x + 20^\circ + 2\beta = 180^\circ \quad \dots (I)$
- En $\triangle BCD$:
 $30^\circ + \beta + \beta + 30^\circ + \beta = 180^\circ$
 $\Rightarrow \beta = 40^\circ$
- En (I):
 $x + 20^\circ + 2(40^\circ) = 180^\circ$
 $\therefore x = 80^\circ$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 8

- Graficando, tenemos:

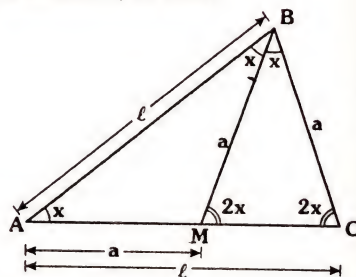


- Piden: x
- Dato: $m\angle ABC = 80^\circ$ y $m\angle BAC$
 $BC = CD$
- Del último dato: $\triangle DCB$ es isósceles
 $\Rightarrow m\angle CDB = m\angle DBC = x + \beta$
- Del primer dato:
 $2x + \beta = 80^\circ + \beta$
 $\therefore x = 40^\circ$

Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 9

- Graficando, se tiene:



- Piden: $m\angle MBC$
- De los datos $\triangle AMB$, $\triangle BMC$ y $\triangle ABC$ son isósceles, completamos medidas angulares:
Sea $m\angle MAB = x \Rightarrow m\angle ABM = x$

- Por \angle exterior: $m\angle BMC = 2x$

$$\triangle MBC : \text{isósceles} \Rightarrow m\angle MCB = 2x$$

$$\triangle ABC : \text{isósceles} \Rightarrow m\angle ABC = 2x$$

$$\Rightarrow m\angle MBC = x$$

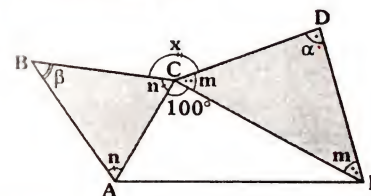
- Finalmente:

$$\triangle MBC : 2x + 2x + x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 36^\circ$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 10



- Piden: x
- Tenemos por dato: $\alpha + \beta = 140^\circ$
- También por dato los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle CDE$ son isósceles de bases \overline{AC} y \overline{CE} .
 $m\angle BAC = m\angle BCA = n$
 $m\angle DCE = m\angle CED = m$
- Luego:
 $x + m + n + 100^\circ = 360^\circ \quad \dots (I)$
- En $\triangle ABC$ y $\triangle CDE$:
 $2n + \beta = 180^\circ \quad \dots (II)$
 $2m + \alpha = 180^\circ \quad \dots (III)$
- Sumando (II) y (III)
 $2n + 2m + \alpha + \beta = 360^\circ$
 140°
 $\Rightarrow m + n = 110^\circ$

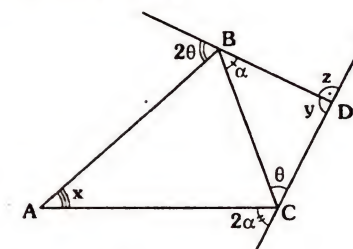
- En (I):

$$x + 110^\circ + 100^\circ = 360^\circ$$

$$\therefore x = 150^\circ$$

Clave **D**

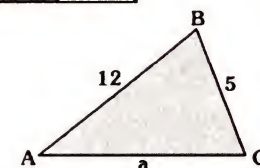
RESOLUCIÓN N° 11



- Piden: $\frac{x+y}{z}$
- Sea: $E = \frac{x+y}{z} \quad \dots (I)$
- En $\triangle BCD$, por ángulo exterior:
 $z = \alpha + \theta \quad \dots (II)$
- En $\triangle ABC$, por teorema 6:
 $x + y = 2\alpha + 2\theta$
 $x + y = 2(\alpha + \theta) \quad \dots (III)$
- Reemplazando en (I):
 $E = \frac{2(\alpha + \theta)}{\alpha + \theta}$
 $\therefore E = 2$

Clave **C**

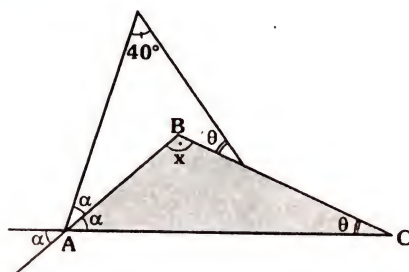
RESOLUCIÓN N° 12



- Piden: $\text{perím}_{\triangle ABC}$.
- Por dato el $\triangle ABC$ es isósceles, es decir "a" es 5 ó 12.
- Pero antes, usemos existencia:
 $12 - 5 < a < 12 + 5$
 $7 < a < 17$
- El único valor para "a", para que el triángulo sea isósceles es 12.
 $\Rightarrow \text{Perím}_{\triangle ABC} = 12 + 12 + 5$
 $\therefore \text{Perím}_{\triangle ABC} = 29 \text{ cm}$

Clave B

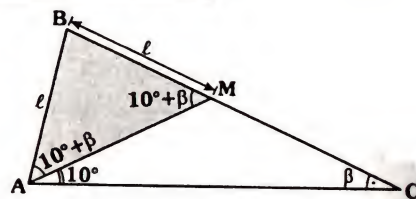
RESOLUCIÓN N° 13



- Se nos pide: x
- En $\triangle ABC$: $x + \alpha + \theta = 180^\circ \dots (I)$
- En \triangle : $\alpha + \theta + 40^\circ = x$
 $\Rightarrow \alpha + \theta = x - 40^\circ$
- Reemplazando en (I):
 $x + x - 40^\circ = 180^\circ$
 $\therefore x = 110^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 14

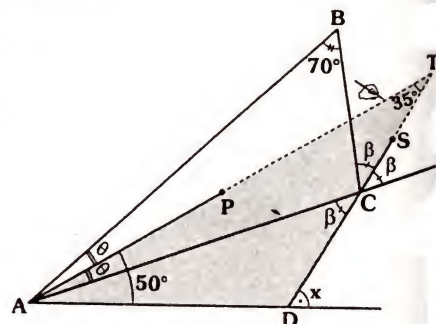


- Piden: $m\angle BAC - m\angle BCA$
- Como: $AB = BM \Rightarrow \triangle ABM$ es isósceles
 $\Rightarrow m\angle BAM = m\angle AMB = 10^\circ + \beta$
 $\Rightarrow m\angle BAC - m\angle BCA = 20^\circ + \beta - \beta$
 $\therefore m\angle BAC - m\angle BCA = 20^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 15

Este problema se puede resolver completando ángulos, pero también de la siguiente forma.



- Se nos pide: x
- Prolongamos \overline{AP} y \overline{CS} , para poder utilizar el teorema 27

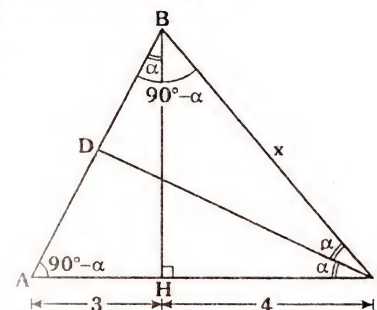
$$\triangle ABC : m\angle ATC = \frac{m\angle ABC}{2}$$

$$\Rightarrow m\angle ATC = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

- En $\triangle ATD$, por ángulo exterior:
 $x = 50^\circ + 35^\circ$
 $\therefore x = 85^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 16

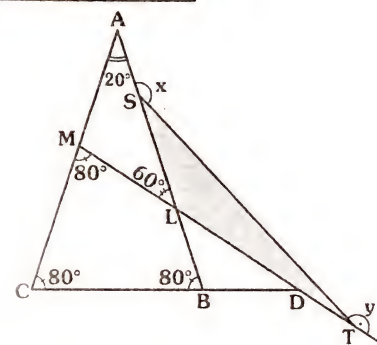


- Piden: x
- En $\triangle AHB$: $m\angle HAB = 90^\circ - \alpha$
- En $\triangle ABC$, se tiene:
 $m\angle ACB = 2\alpha$ y $m\angle CAB = 90^\circ - \alpha$
 $\therefore m\angle ABC = 90^\circ - \alpha$, es decir el $\triangle ABC$ es isósceles $\Rightarrow BC = AC$

$$\therefore x = 7$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 17



- Piden: $x + y$
- Por dato: $AB = AC$ y $DM = DC$
 $\Rightarrow \triangle ABC$ y $\triangle DMC$ son isósceles
 $\Rightarrow m\angle ACB = m\angle CBA = m\angle CMD = 80^\circ$
- En $\triangle DMA$, por ángulo exterior:
 $m\angle MLA + 20^\circ = 80^\circ \Rightarrow m\angle MLA = 60^\circ$

Finalmente:

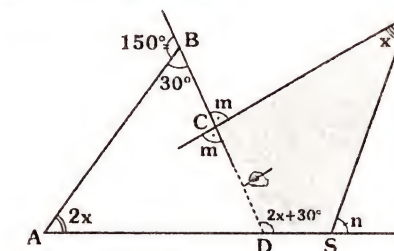
- En $\triangle TLS$, por suma de ángulos exteriores.

$$x + y + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\therefore x + y = 300^\circ$$

Clave C

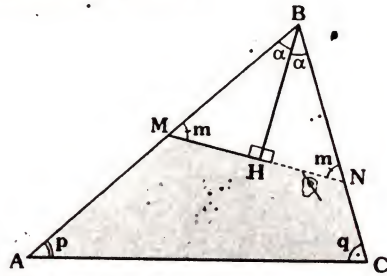
RESOLUCIÓN N° 18



- Se nos pide x
- Dato: $m + n = 150^\circ$
- Se prolonga \overline{BC} , hasta obtener el triángulo ABD, por ángulo exterior:
 $m\angle SDB = 2x + 30^\circ$
- En \triangle , por teorema 6:
 $x + 2x + 30^\circ = m + n$
 $\Rightarrow 3x + 30^\circ = 150^\circ$
 $\therefore x = 40^\circ$

Clave E

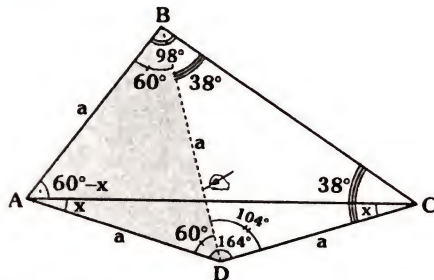
RESOLUCIÓN N° 19



- Se nos pide la relación entre m , p y q
- Se prolonga \overline{MH} hasta que corte a \overline{BC} en N .
- En $\triangle MHB$: $\alpha + m = 90^\circ$
 \Rightarrow En $\triangle HNB$: $m \angle HNB = m$
- En \triangle , por teorema 8:
 $m + m = p + q$
 $\therefore m = \frac{p+q}{2}$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 20



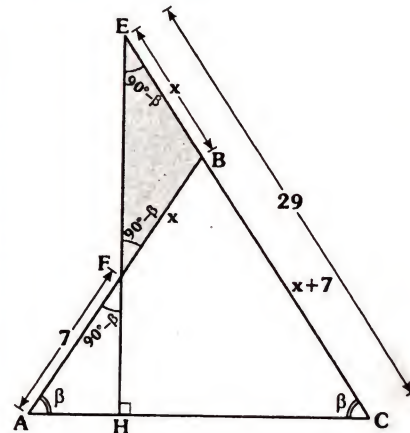
- Piden: x
- Por dato: $AB = AD$
- Como: $m \angle BAD = 60^\circ \Rightarrow \triangle BAD$ es equilátero

• Luego:

$$\begin{aligned} m \angle DBC &= 38^\circ \text{ y } m \angle ADC = 104^\circ \\ \Rightarrow m \angle DCB &= 38^\circ \\ \Rightarrow \triangle BDC &: \text{isósceles} \Rightarrow BD = DC = a \\ \triangle ADC &: \text{isósceles} \Rightarrow m \angle ACD = x \\ \Rightarrow x + x + 164^\circ &= 180^\circ \\ \therefore x &= 8^\circ \end{aligned}$$

Clave D

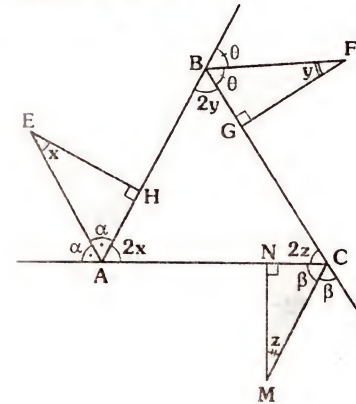
RESOLUCIÓN N° 21



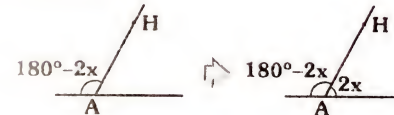
- Piden: x
- Por dato $\triangle ABC$: isósceles ($AB = BC$)
- $\triangle HEC$: $m \angle HEC = 90^\circ - \beta$
- $\triangle AHF$: $m \angle HFA = 90^\circ - \beta$
- $\triangle FBE$ es isósceles $\Rightarrow BF = BE = x$
- También $AB = BC = x + 7$
 $\Rightarrow x + x + 7 = 29$
 $\therefore x = 11$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 22



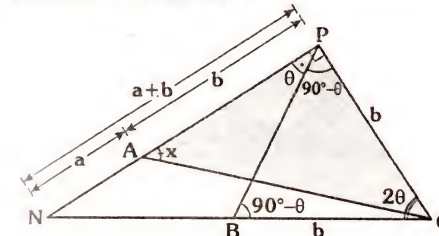
- Piden: $x + y + z$
- En $\triangle AEH$: $\alpha = 90^\circ - x$
- Del gráfico:



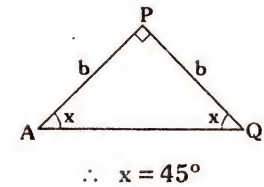
- En forma análoga:
 $m \angle ABC = 2y \Rightarrow m \angle ACB = 2z$
- Finalmente en $\triangle ABC$:
 $2x + 2y + 2z = 180^\circ$
 $\therefore x + y + z = 90^\circ$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 23

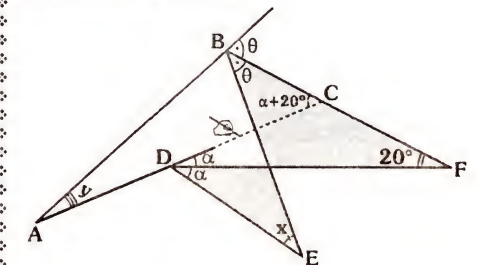


- Piden: x
- Dato: $NP = AN + QB$ y
 $m \angle PQN = 2(m \angle NPB)$
- Como:
 $m \angle NPQ = 90^\circ \Rightarrow m \angle BPQ = 90^\circ - \theta$
- En $\triangle BPQ$ se tiene:
 $m \angle BQB = 2\theta \Rightarrow m \angle PBQ = 90^\circ - \theta$
- Luego el triángulo BPQ isósceles
 $\Rightarrow BQ = PQ = b$
- Como: $NP = a + b \Rightarrow AP = b$
- En $\triangle APQ$:



Clave B

RESOLUCIÓN N° 24



- Piden: $x - y$
- En \triangle : $x + \alpha = \theta + 20^\circ$
 $\Rightarrow x = \theta + 20^\circ - \alpha$
- En $\triangle ABC$, por ángulo exterior:
 $y + \alpha + 20^\circ = \theta \Rightarrow y = \theta - \alpha - 20^\circ$

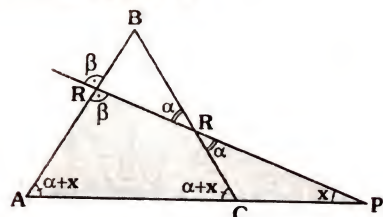
• Finalmente:

$$x - y = (\theta - 20^\circ - \alpha) - (\theta - \alpha - 20^\circ)$$

$$\therefore x - y = 40^\circ$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 25



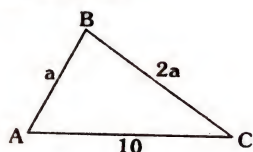
- Se nos pide: x
- Dato: $\alpha + \beta = 40$ y $AB = BC$
- En $\triangle CRP$ por ángulo exterior:
 $m\angle RCA = \alpha + x$
- Como: $AB = BC \Rightarrow \triangle ABC$ es isósceles
 $\Rightarrow m\angle BAC = m\angle ACB = \alpha + x$
- En $\triangle ARP$:

$$\frac{\alpha + \beta + x + x}{40^\circ} = 180^\circ$$

$$\therefore x = 70^\circ$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 26



- Piden: $a_{(\text{menor entero})}$
- Por existencia de triángulos:
 $2a - a < 10 < 2a + a$
 $a < 10 < 3a$

• Se tendrá entonces:

$$a < 10$$

$$10 < 3a \Rightarrow \frac{10}{3} < a$$

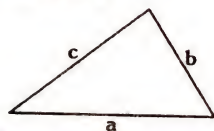
$$\frac{10}{3} < a < 10$$

$$3,33 < a < 10$$

$$\therefore a_{(\text{menor entero})} = 4$$

Clave **A**

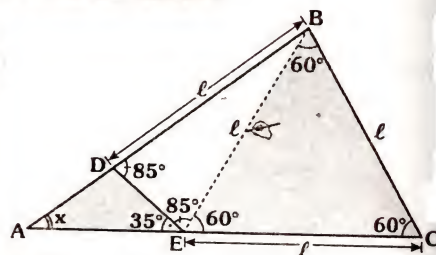
RESOLUCIÓN N° 27



- Nos piden el mayor valor entero de a (en realidad, puede ser " b " o " c ")
- Dato: $a + b + c = 40$
- Por existencia de triángulos: $a < b + c$
- Sumando " a ": $a + a < a + b + c$
 $\Rightarrow 2a < 40$
 $a < 20$
- Como $a < 20$, el mayor valor entero es 19.

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 28



- Piden: x
- Dato: $BD = BC = EC$

Como $BC = CE$ y $m\angle BCE = 60^\circ$, al trazar \overline{BE} el triángulo EBC resulta ser equilátero.

$$\Rightarrow EB = \ell \text{ y } m\angle BEC = 60^\circ$$

$\triangle BED$ es isósceles

$$\Rightarrow m\angle BDE = m\angle DEB = 85^\circ$$

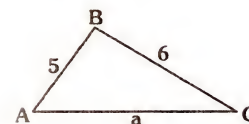
En $\triangle AED$, por ángulo exterior:

$$x + 35^\circ = 85^\circ$$

$$\therefore x = 50^\circ$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 29



Piden: perímetro $_{(\triangle ABC)}$

Por dato: $a = 2(AB)$ o $a = 2(BC)$, pero antes, utilicemos existencia:

$$6 - 5 < a < 6 + 5$$

$$1 < a < 11$$

De acuerdo al dato, la única posibilidad para que " a " sea el doble de uno de los otros dos es:

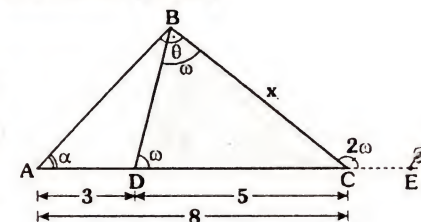
$$a = 10$$

$$\Rightarrow \text{Perímetro}_{(\triangle ABC)} = 10 + 5 + 6$$

$$\therefore \text{Perímetro}_{(\triangle ABC)} = 21$$

Clave **E**

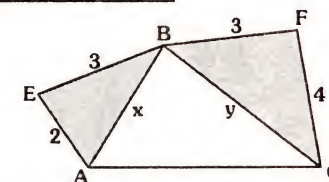
RESOLUCIÓN N° 30



- Piden: x
- Dato: $\alpha + \theta = 2\omega$, $AD = 3$ y $AC = 8$
 $\Rightarrow DC = 5$
- Por \angle exterior, en el triángulo ABC :
 $m\angle BCE = \alpha + \theta$
- Del primer dato: $m\angle BCE = 2\omega$
- En $\triangle DBC$:
Como: $m\angle BDC = \omega$ y $m\angle BCE = 2\omega$
 $\Rightarrow m\angle DBC = \omega$
- Luego: $\triangle DBC$ es isósceles
 $\therefore x = 5$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 31



- Piden el mayor valor entero de: $x + y$
- Por existencia de triángulos
En $\triangle AEB$: $x < 2 + 3 \Rightarrow x < 5$
En $\triangle BFC$: $y < 3 + 4 \Rightarrow y < 7$
 $\Rightarrow x + y < 12$
 $\therefore (x + y)_{\text{máximo entero}} = 11$

Clave **C**

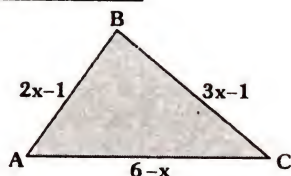
Nota

El estudiante debe notar que x e y no necesariamente son enteros, pues nos piden la suma, la cual debe ser máxima y entera.

Como $x < 5$ e $y < 7$, es cierto que los máximos enteros de x e y por separado son 4 y 6 respectivamente, pero esto no piden.

En este tipo de ejercicios, hay que analizar cual es la expresión que se busca.

RESOLUCIÓN N° 32



- Piden: Perímetro $_{(\triangle ABC)}$
- Dato: AB, BC y AC son enteros.
- Primero, las longitudes son positivas.
 - $6-x > 0 \Rightarrow x < 6$... (I)
 - $2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$... (II)
 - $3x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$... (III)
- De la primera expresión, se deduce que x es entero, ya que AC es entero.
- Por existencia:

$$(3x-1) - (2x-1) < 6-x < (3x-1) + (2x-1)$$

$$x < 6-x < 5x-2$$
- Analizando por separado:
 - $x < 6-x \Rightarrow x < 3$... (IV)
 - $6-x < 5x-2 \Rightarrow x > \frac{4}{3}$... (V)

- De las expresiones (I) al (V):

$$\frac{4}{3} < x < 3 \quad \dots (a)$$

- Como se indica x es entero, el valor de x , de acuerdo a la última expresión es 2.

$$\Rightarrow AB = 2(2) - 1 = 3$$

$$BC = 3(2) - 1 = 5$$

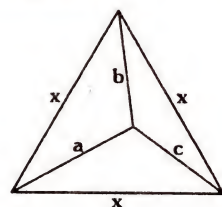
$$AC = 6 - (2) = 4$$

$$\Rightarrow \text{Perímetro}_{(\triangle ABC)} = 3 + 4 + 5$$

$$\therefore \text{Perímetro}_{(\triangle ABC)} = 12$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 33



- Nos piden: x
- Dato:
 - x es entero
 - $a + b + c = 9$
- Por la observación del teorema 50:

$$\frac{3x}{2} < a + b + c < 2x$$
- Analizando por partes:
 - $\frac{3x}{2} < a + b + c$
 - $\frac{3x}{2} < 9 \Rightarrow x < 6$... (I)
 - $a + b + c < 2x$
 - $9 < 2x \Rightarrow x > 4,5$... (II)

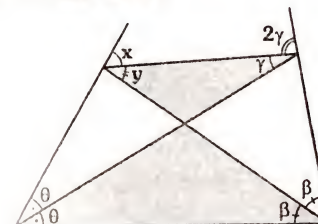
De (I) y (II):

$$4,5 < x < 6$$

$$\therefore x_{(\text{entero})} = 5$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 34



Piden: $\frac{x}{y}$

En Σ : $y + \gamma = \theta + \beta$

$$\Rightarrow y = \theta + \beta - \gamma$$

En \triangle : por teorema 8

$$x + 2\gamma = 2\theta + 2\beta$$

$$x = 2\theta + 2\beta - 2\gamma$$

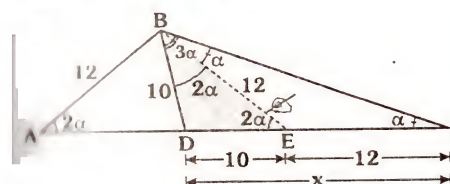
$$\Rightarrow x = 2(\theta + \beta - \gamma)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2(\theta + \beta - \gamma)}{(\theta + \beta - \gamma)}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 2$$

Clave D

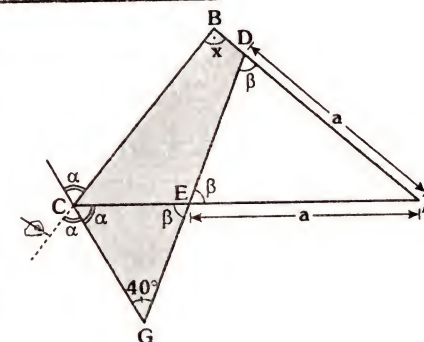
RESOLUCIÓN N° 35



- Piden: x
- Datos:
 - $AB = 12$, $BD = 10$, $m\angle ACB = \alpha$, $m\angle BAC = 2\alpha$ y $m\angle DBC = 3\alpha$
- Se traza \overline{BE} , tal que $m\angle EBC = \alpha$
- $\Rightarrow m\angle DBE = 2\alpha$ y por ángulo exterior en el $\triangle BEC$: $m\angle BED = 2\alpha$
- Tenemos entonces: $\triangle EBD$, $\triangle EBC$ y $\triangle ABE$ son isósceles.
 - $\triangle BDE$: $BD = DE = 10$
 - $\triangle ABE$: $AB = BE = 12$
 - $\triangle EBC$: $EB = EC = 12$
- $\Rightarrow x = 10 + 12$
- $\therefore x = 22$

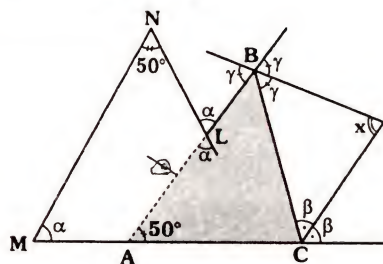
Clave D

RESOLUCIÓN N° 36



- Piden: x
- Dato: $AE = AD$
- $\triangle EDA$ isósceles
 - $\Rightarrow m\angle DEA = m\angle EDA = \beta$
- En \triangle , por teorema 6:
 - $x + 40^\circ = \alpha + \beta$... (I)

RESOLUCIÓN N° 42



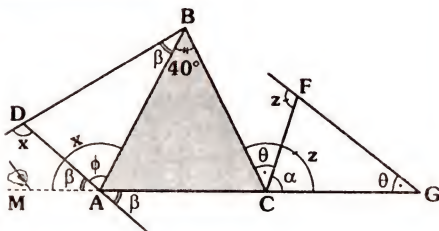
- Nos piden: x
- En $\triangle(MNLA)$, por teorema 8
 $m\angle LAC + \alpha = 50^\circ + \alpha$
 $\Rightarrow m\angle LAC = 50^\circ$
- En $\triangle ABC$, por ángulo entre bisectrices (teorema 26)

$$x = 90^\circ - \frac{50^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 65^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 43



- Piden: $x + z$
- Por ángulo exterior, en:
 $\triangle BAD : x = \beta + \phi$
 $\triangle CFE : z = \alpha + \theta$

$$\Rightarrow m\angle MAB = \beta + \phi = x$$

$$m\angle BCG = \alpha + \theta = z$$

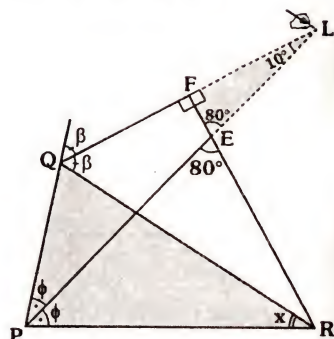
En $\triangle BAC$, por teorema 7:

$$x + z = 180^\circ + 40^\circ$$

$$\therefore x + z = 220^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 44



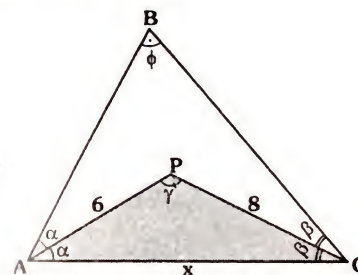
- Piden: x
- Prolongamos \overline{QF} y \overline{PE} , las cuales se cortan en L.
- En $\triangle EFL : m\angle FLE = 10^\circ$
- En $\triangle RPQ$, por ángulo entre bisectrices (teorema 27).

$$10^\circ = \frac{x}{2}$$

$$\therefore x = 20^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 45



Nos piden la cantidad de valores enteros de x .

Por teorema 25:

$$\gamma = 90^\circ + \frac{\phi}{2} \Rightarrow \gamma > 90^\circ$$

Luego el triángulo APC es obtusángulo.

En $\triangle APC$ como $\gamma > 90^\circ$, \overline{AC} es el lado de mayor longitud:

$$\Rightarrow x > 8 \quad \dots (I)$$

Por existencia:

$$8 - 6 < x < 8 + 6$$

$$2 < x < 14 \quad \dots (II)$$

Como $\gamma > 90^\circ$, por teorema 21:

$$x^2 > 6^2 + 8^2$$

$$\Rightarrow x > 10 \quad \dots (III)$$

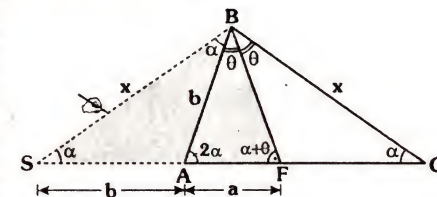
De (I), (II) y (III):

$$10 < x < 14$$

Luego, los valores enteros de x , son: 11, 12 y 13.

Clave C

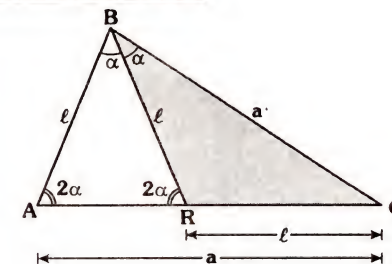
RESOLUCIÓN N° 46



- Piden: x
- Como $m\angle BAC = 2(m\angle BCA)$, por el criterio indicado en la página 37 (trazos auxiliares):
- Se prolonga \overline{CA} , tal que $m\angle BSF = \alpha$
- Luego: $m\angle SBA = \alpha \Rightarrow \triangle SAB$ y $\triangle SBC$ son isósceles.
 $\Rightarrow AB = AS = b$ y $SB = BC = x$
- En $\triangle BFC$, por ángulo exterior:
 $m\angle BFA = \alpha + \theta$
- Se tendrá entonces:
 $m\angle SBF = m\angle BFA = \alpha + \theta$
- $\triangle SBF$ es isósceles
 $\Rightarrow SB = SF$
 $\therefore x = a + b$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 47

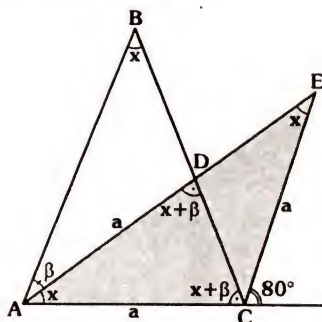


- Piden: $m\angle BCA$

- Dato: $AC=BC$ y $AB=BR$.
 $\Rightarrow \triangle ABC$ y $\triangle ABR$ son isósceles
 $\Rightarrow m\angle CBA = m\angle BAC = 2\alpha$
 $m\angle BAR = m\angle ARB = 2\alpha$
- En $\triangle BRC$: por ángulo exterior
 $m\angle BCA + \alpha = 2\alpha$
 $\Rightarrow m\angle BCA = \alpha$
- En $\triangle ABR$:
 $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$
 $\therefore \alpha = 36^\circ$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 48

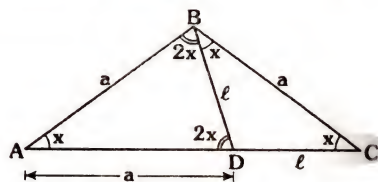


- Piden: x
- Dato: $AB=BC$ y $AD=CE$
 $\Rightarrow \triangle ABC$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle BAC = m\angle ACB = x + \beta$
- Por ángulo exterior, en $\triangle ABD$:
 $m\angle ADC = x + \beta$
 $\Rightarrow \triangle ADC$ es isósceles $\Rightarrow AD = AC = a$
- Como $AC = CE = a \Rightarrow \triangle ACE$ es isósceles $\Rightarrow m\angle CAE = m\angle AEC = x$

- Por ángulo exterior, en $\triangle AFC$:
 $x + x = 80^\circ$
 $\therefore x = 40^\circ$

Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 49



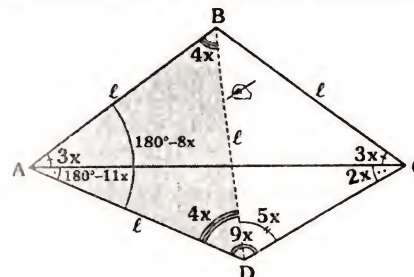
- Piden: x
- Dato: $AD=BC$; $BD=DC$ y
 $m\angle BAC = m\angle DBC$
- $\triangle BDC$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle DBC = m\angle DCB = x$
- $\triangle ABC$: isósceles $\Rightarrow AB = BC = a$
- $\triangle ABD$ isósceles
 $\Rightarrow m\angle ABD = m\angle ADB = 2x$
- En $\triangle ABD$:
 $2x + 2x + x = 180^\circ$
 $\therefore x = 36^\circ$

Clave **P**

RESOLUCIÓN N° 50

- Del dato:
 $m\angle ADC = 3(m\angle BAC) = 9x$
 $\Rightarrow m\angle ADC = 9x$ y
 $m\angle BAC = 3x$

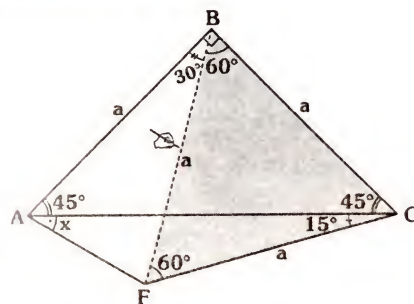
- Ubiquemos estos datos en el gráfico:



- Se nos pide: x
- También es dato: $AB = BC = AD$
 $\Rightarrow \triangle ABC$: isósceles
- En $\triangle ADC$: $m\angle DAC = 180^\circ - 11x$
 $\Rightarrow m\angle BAD = 180^\circ - 8x$ y $AB = AD$
 $\Rightarrow \triangle BAD$: $m\angle ABD = m\angle ADB = 4x$
 $\Rightarrow m\angle BDC = 5x$
- Luego el $\triangle BDC$ es isósceles:
 $DB = BC = l$
- Como: $AB = AD = BD = l \Rightarrow$ el triángulo ABD es equilátero
 $\Rightarrow 4x = 60^\circ$
 $\therefore x = 15^\circ$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 51

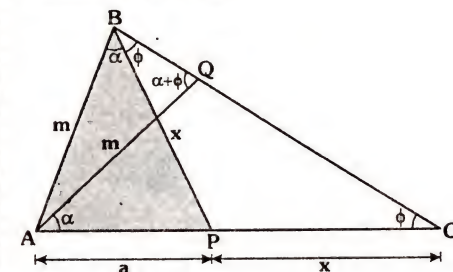


- Piden: x

- Del dato:
 $BC = CF = a$ y $m\angle ACF = 15^\circ$
 $\Rightarrow m\angle BCF = 60^\circ \Rightarrow \triangle BFC$ equilátero
- Luego: $AB = BF = a$ y
 $m\angle ABF = 30^\circ$
- $\triangle ABF$ isósceles:
 $m\angle BAF = m\angle AFB = 75^\circ$
 $\Rightarrow 45^\circ + x = 75^\circ$
 $\therefore x = 30^\circ$

Clave **E**

RESOLUCIÓN N° 52



- Nos piden el menor valor entero de x en función de m .
- Dato: $BP = PC$ y $AB = AQ = m$, donde m es par.
- Se tendrá entonces:
 $\triangle BQA$ y $\triangle BPC$ isósceles
 $\Rightarrow m\angle PBC = m\angle PCB = \phi$
- Por \angle exterior en $\triangle AQC$:
 $m\angle AQB = \alpha + \phi$
 $\triangle ABQ$: $m\angle QBA = \alpha + \phi$
 $\Rightarrow m\angle ABP = \alpha$
- Como $m\angle BAP > m\angle ABP$, por t. de la correspondencia, en $\triangle ABP$:
 $x > a$... (I)

- Por existencia:

$$m < a + x \quad \dots (II)$$

- De (I): $a < x$
- Sumando $m + a < a + 2x$

$$\Rightarrow m < 2x$$

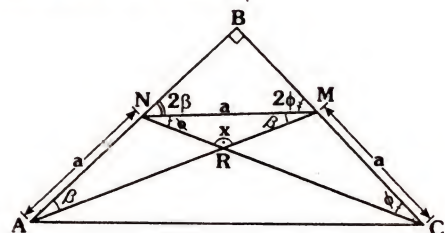
$$\Rightarrow \frac{m}{2} < x$$

- Como es par $\Rightarrow \frac{m}{2} \in \mathbb{Z}^+$

$$\therefore x_{(\text{menor entero})} = \frac{m}{2} + 1$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 53

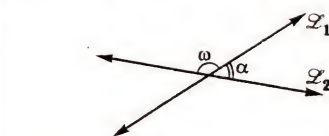
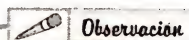


- Piden: x
- Dato: $AN = NM = MC \Rightarrow \triangle ANM$ y $\triangle NMC$: isósceles
- $\triangle NRM$: $x + \beta + \phi = 180^\circ \quad \dots (I)$
- $\triangle NBM$: $2\beta + 2\phi = 90^\circ$
 $\Rightarrow \beta + \phi = 45^\circ$
- En (I):

$$x + 45^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore x = 135^\circ$$

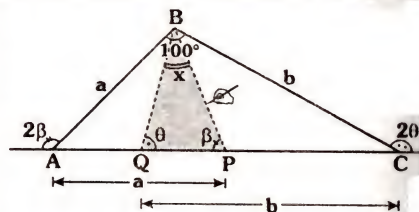
Clave **C**



ω ó α , representan la medida del ángulo entre \vec{L}_1 y \vec{L}_2 .

RESOLUCIÓN N° 54

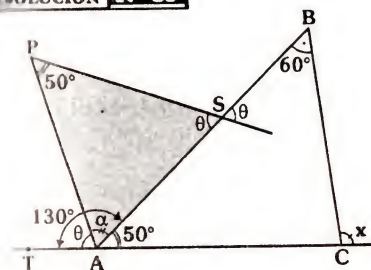
En este ejercicio, los puntos P y Q están en \overline{AC} , pero no indican el orden, dada las condiciones, se obtendrá lo siguiente



- Piden: x
- Dato: $AB = AP$; $CA = CQ$ y $m\angle ABC = 100^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ABP$ y $\triangle QBC$ son isósceles
 $\Rightarrow m\angle ABP = m\angle APB = \beta$
 $m\angle QBC = m\angle BQC = \theta$
- En $\triangle QBP$: $x + \theta + \beta = 180^\circ \quad \dots (I)$
- En $\triangle ABC$: por teorema 7
 $2\theta + 2\beta = 180^\circ + 100^\circ$
 $\Rightarrow \theta + \beta = 140^\circ$
- Reemplazando en (I):
 $x + 140^\circ = 180^\circ$
 $\therefore x = 40^\circ$

Clave **E**

RESOLUCIÓN N° 55



- Piden: x

$$\text{En } \triangle APS: \alpha + \theta + 50^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \theta = 130^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle TAS = \alpha + \theta = 130^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle BAC = 50^\circ$$

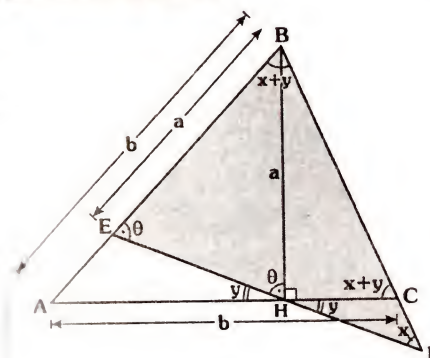
- En $\triangle ABC$ por ángulo exterior:

$$x = 50^\circ + 60^\circ$$

$$\therefore x = 110^\circ$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 56



- Piden: x

- Dato: $AB = AC$ y $EB = BH = a$
 $\Rightarrow \triangle ABC$ y $\triangle EBC$ son isósceles

- Sea $m\angle CHD = y \Rightarrow m\angle ACB = x + y$
 $\Rightarrow m\angle ABC = x + y$

- También: $m\angle BEH = m\angle BHE = \theta$

- En $\triangle EBD$:

$$x + x + y + \theta = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2x + y + \theta = 180^\circ \quad \dots (I)$$

- Como: $m\angle AHB = 90^\circ$

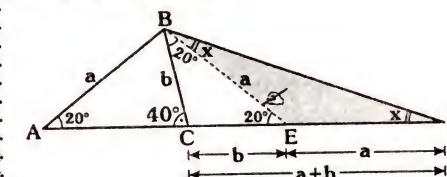
$$\Rightarrow \theta + y = 90^\circ$$

- En (I): $2x + 90^\circ = 180^\circ$

$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 57



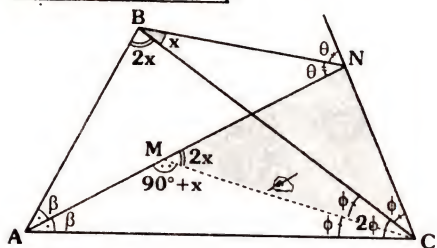
- Piden: x
- Por dato: $CP = AB + BC$
- Ubicamos E en \overline{CP} tal que $CE = b$
 $\Rightarrow \triangle CEB$: isósceles ($CB = CE$)
 $\Rightarrow m\angle CBE = m\angle CEB = 20^\circ$
- Se tendrá ahora: $\triangle ABE$ es isósceles
 $\Rightarrow AB = BE = a$
- En $\triangle EBP$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle EBP = m\angle EPB = x$
- Por ángulo exterior:

$$x + x = 20^\circ$$

$$\therefore x = 10^\circ$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 58



- Piden: x
- Como $m\angle ACB = 2\phi$, se traza \overline{CM} tal que: $m\angle ACM = m\angle BCM = \phi$
- En $\triangle CMN$, por teorema 27 (ángulo entre bisectrices).

$$m\angle CBN = \frac{m\angle CMN}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{m\angle CMN}{2}$$

$$\Rightarrow m\angle CMN = 2x$$

- Por teorema 25, en $\triangle ABC$:

$$m\angle AMC = 90^\circ + \frac{m\angle ABC}{2}$$

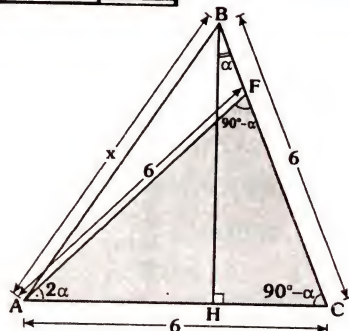
$$\Rightarrow m\angle AMC = 90^\circ + x$$

- Finalmente: $90^\circ + x + 2x = 180^\circ$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave A

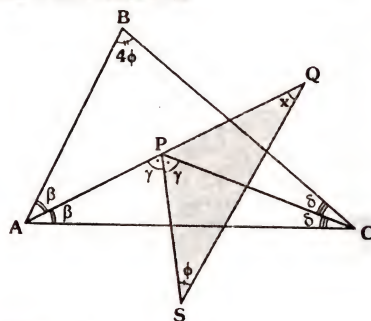
RESOLUCIÓN N° 59



- Piden: x (máximo entero)
- Dato: $AF = BC = 6$
 $m\angle FAC = 2(m\angle HBC)$
- En $\triangle HBC$: $m\angle BCH = 90^\circ - \alpha$
- En $\triangle AFC$:
 $m\angle FAC = 2\alpha$ y $m\angle ACF = 90^\circ - \alpha$
 $\Rightarrow m\angle AFC = 90^\circ - \alpha$
 $\Rightarrow \triangle AFC$: isósceles $\Rightarrow AF = AC = 6$
- En $\triangle ABC$, por existencia:
 $x < 6 + 6 \Rightarrow x < 12$
 $\therefore x(\text{máximo entero}) = 11$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 60



- Piden: x
- Por ángulo entre bisectrices (teorema 25), en $\triangle ABC$:

$$m\angle APC = 90^\circ + \frac{4\phi}{2}$$

$$2\gamma = 90^\circ + 2\phi$$

$$\Rightarrow \gamma = 45^\circ + \phi$$

- En $\triangle SQP$, por ángulo exterior

$$x + \phi = \gamma$$

$$\Rightarrow x + \phi = 45^\circ + \phi$$

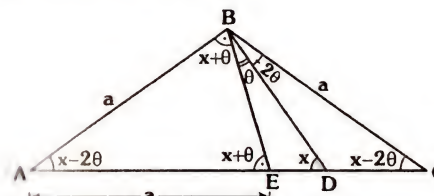
$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave D

Solucionario

Ciclo Cepre-Uni

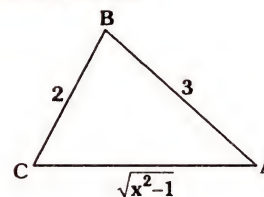
RESOLUCIÓN N° 61



- Piden: x
- Por ángulo exterior:
 $m\angle BCD = x - 2\theta$
- $\triangle ABC$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle BAC = m\angle BCA = x - 2\theta$
- $\triangle BDE$, por ángulo exterior:
 $m\angle BEA = x + \theta$
- $\triangle ABE$: isósceles
 $m\angle ABE = x + \theta$
 $x - 2\theta + x + \theta + x + \theta = 180^\circ$
 $\Rightarrow 3x = 180^\circ$
 $\therefore x = 60^\circ$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 62



- Nos piden la cantidad de valores enteros para x .
- Se trata de un problema algebraico, analicemos todas las restricciones

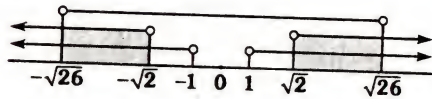
Parte I

- En: $\sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 > 0$
 $x \in \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle \dots (I)$
- También aquí, esta contenido, la condición: $AC > 0$.
- Pues AC es longitud de un lado.

Parte II

- Por existencia:
 $3 - 2 < \sqrt{x^2 - 1} < 3 + 2$
 $1 < \sqrt{x^2 - 1} < 5$
- Resolviendo por partes:
 $\sqrt{x^2 - 1} < 5 \Rightarrow x^2 - 1 < 25$
 $x^2 < 26$
 $\Rightarrow x \in \langle -\sqrt{26}; \sqrt{26} \rangle \dots (II)$
 $1 < \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow 1 < x^2 - 1$
 $2 < x^2$
 $\Rightarrow x \in \langle -\infty; -\sqrt{2} \rangle \cup \langle \sqrt{2}; \infty \rangle \dots (III)$

- De (I), (II) y (III):



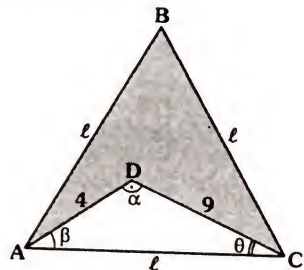
$$\text{C.S. } x \in \langle -\sqrt{26}; -\sqrt{2} \rangle \cup \langle \sqrt{2}; \sqrt{26} \rangle$$

- Como x , debe ser entero por condición, los valores de x son:

$$\{-5; -4; -3; -2; 2; 3; 4; 5\}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 63



- Piden el menor valor entero del perímetro de ABCD

$$\text{Perim}_{ABCD} = 2l + 4 + 9 = 2l + 13$$

"Lo que debe ser entero es el perímetro como se indicó en el problema 31, l , no es necesariamente entero"

- Por dato: $l + l + l > 33$
 $l > 11$... (I)
- Analicemos mas restricciones.
- En $\triangle ADC$, por existencia
 $9 - 4 < l < 9 + 4$
 $5 < l < 13$... (II)

- Como $\alpha > \theta$ y $\alpha > \beta$ (pues $\alpha > 60^\circ$, $\theta < 60^\circ$ y $\beta < 60^\circ$)
 $l > 9, l > 4 \Rightarrow l > 9$... (III)

- En $\triangle ABCD$, por teorema 41

$$l + l > 4 + 9 \Rightarrow l > 6,5$$
 ... (IV)

- De (I), (II) (III) y (IV):

$$11 < l < 13$$

- Formando, la expresión que se nos pide: $(2l + 13)$

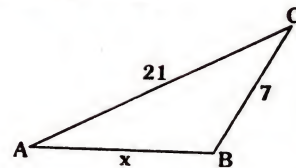
$$\Rightarrow 35 < 2l + 13 < 39$$

$$35 < \text{perim}_{ABCD} < 39$$

- Por lo tanto el menor valor del perímetro es 36.

Clave C

RESOLUCIÓN N° 64



- Nos piden el mayor valor entero de $(2x - 3)$

$$\text{Sea: } E = 2x - 3$$
 ... (I)

- Por existencia:

$$21 - 7 < x < 21 + 7$$

$$14 < x < 28$$

- Formando la expresión (I).

- Multiplicando 2:

$$14(2) < 2x < (28)2$$

Restando: 3

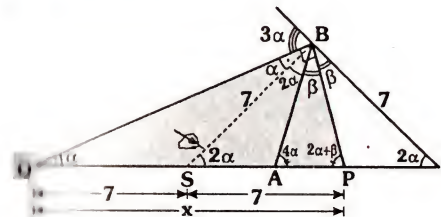
$$28 - 3 < 2x - 3 < 56 - 3$$

$$25 < E < 53$$

$$\therefore E_{(\text{máximo entero})} = 52$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 65



- Piden x

$$\text{Sea } m\angle BAC = 4\alpha \Rightarrow m\angle BCA = 2\alpha \text{ (dato)}$$

- Como \overline{BQ} y \overline{BP} son bisectrices:

$$\Rightarrow m\angle QBP = 90^\circ$$

- Se tendrá entonces:

$$m\angle BQC = \alpha$$

- Se traza \overline{BS} tal que:

$$m\angle QBC = \alpha$$

- Luego:

$$\triangle SBC: \text{isósceles} \Rightarrow SB = 7$$

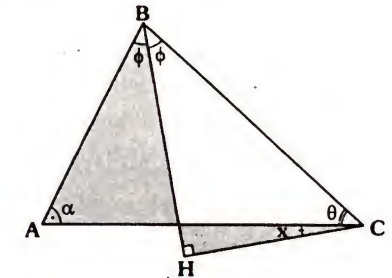
$$\triangle QSB: \text{isósceles} \Rightarrow BS = SQ = 7$$

$$\triangle SBP: \text{isósceles} \Rightarrow SB = SP = 7$$

$$\therefore x = 14$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 66



- Piden: x

$$\text{Dato: } \alpha - \theta = 20^\circ$$

$$\text{En } \triangle: x + 90^\circ = \alpha + \phi$$
 ... (I)

$$\text{En } \triangle BHC: x + \theta + \phi = 90^\circ$$
 ... (II)

- Sumando (I) y (II):

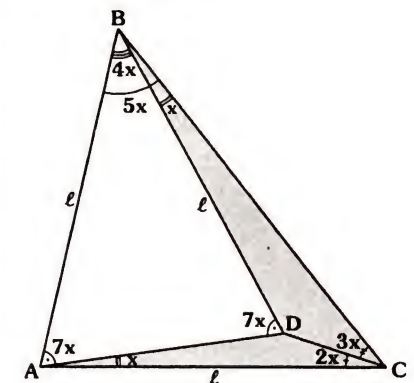
$$2x + \phi + \theta + 90^\circ = 90^\circ + \alpha + \phi$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\alpha - \theta}{20^\circ}$$

$$\therefore x = 10^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 67



- Piden: $m\angle ABD$

En $\triangle ADBC$:

$$m\angle ADB = x + 5x + x = 7x$$

$\Rightarrow \triangle ABD$ es isósceles $\Rightarrow AB = AD = \ell$

$\triangle ABC$ es isósceles, pues $AB = AC$

$$\Rightarrow m\angle ABC = 5x$$

En $\triangle ABC$: $5x + 5x + 8x = 180^\circ$

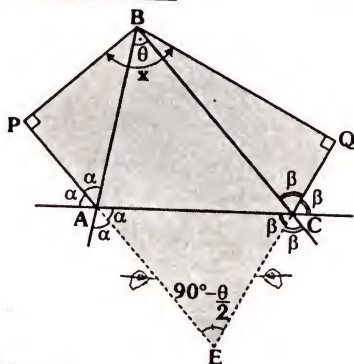
$$\Rightarrow x = 10^\circ$$

Como nos piden $m\angle ABD$:

$$\Rightarrow m\angle ABD = 4x = 40^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 68



Piden: x

Se prolonga \overline{PA} y \overline{QC} tal que se cortan en E.

En $\triangle ABC$, por teorema 26:

$$m\angle AEC = \frac{90^\circ - \theta}{2}$$

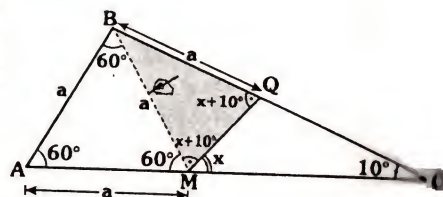
En $\triangle PBQE$, por corolario 1 del teorema 6:

$$x + 90^\circ - \frac{\theta}{2} = 180^\circ$$

$$\therefore x = 90^\circ + \frac{\theta}{2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 69



Piden x

De los datos $AB = AM = BQ$ y como $m\angle BAC = 60^\circ \Rightarrow$ al trazar \overline{BM} , el $\triangle ABM$ resulta ser equilátero $\Rightarrow BM = AM$ y $m\angle AMB = 60^\circ$

También: $\triangle MBQ$ isósceles

$$\Rightarrow m\angle BMQ = m\angle MQB = x + 10^\circ$$

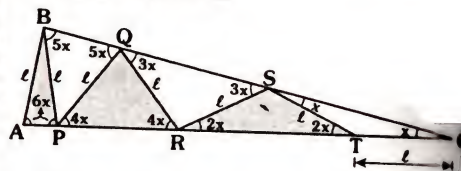
Finalmente:

$$60^\circ + x + 10^\circ + x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 55^\circ$$

Clave D

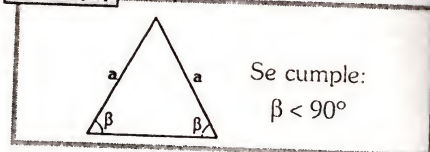
RESOLUCIÓN N° 70



Piden el mayor valor entero de x .

De los datos se tiene: $\triangle ABP$, $\triangle BPQ$, $\triangle PQR$, $\triangle QRS$, $\triangle STR$ y $\triangle STC$ son isósceles

Recordar:



Se cumple:

$$x < 90^\circ$$

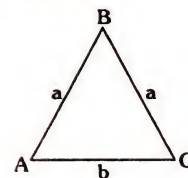
Se podría plantear ello en cada triángulo isósceles, pero la expresión que contiene a todas las restricciones, está en el $\triangle ABP$:

$$6x < 90^\circ \Rightarrow x < 15^\circ$$

$$\therefore x_{(\text{máximo entero})} = 14^\circ$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 71



Por dato: a y $b \in \mathbb{Z}^+$

$$\frac{2a+b}{\text{perímetro}(2p)} = 18 \Rightarrow p = 9$$

Nos piden la cantidad de triángulos con esa característica.

Por corolario del teorema 15 de existencia:

$$a < p \Rightarrow a < 9 \quad \dots (I)$$

$$b < p \Rightarrow b < 9 \quad \dots (II)$$

También:

$$b < 2a \Rightarrow b + 2a < 2a + 2a$$

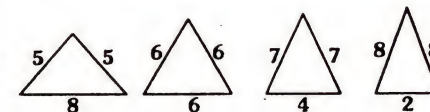
$$18 < 4a$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2} < a \quad \dots (III)$$

$$\text{De (I) y (III): } \frac{9}{2} < a < 9$$

Los valores enteros de a , son: 5, 6, 7, 8 para cada valor de a , se obtiene un valor de b , pues el perímetro es 18.

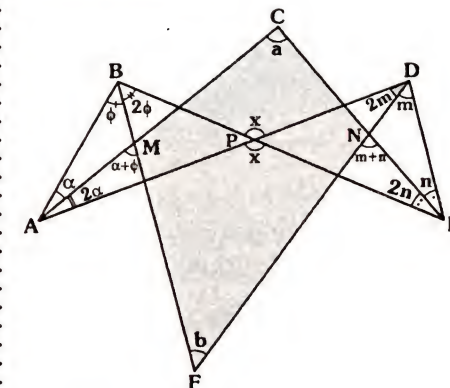
Así tenemos, los triángulos:



Clave D

Se está considerando el segundo triángulo, como caso particular, ya que la definición no excluye este caso.

RESOLUCIÓN N° 72



Pide: x

Dato: $a + b = \omega$

Por teorema 4, en:

$$\triangle ACEP: x = a + 2\alpha + 2n \quad \dots (I)$$

$$\triangle BFDP: x = b + 2\phi + 2m \quad \dots (II)$$

Sumando (I) y (II):

$$2x = a + b + 2(\alpha + \phi + m + n) \quad \dots (III)$$

En $\triangle MCNF$, por teorema 6:

$$\alpha + \phi + m + n = a + b \quad \dots (IV)$$

• En (III):

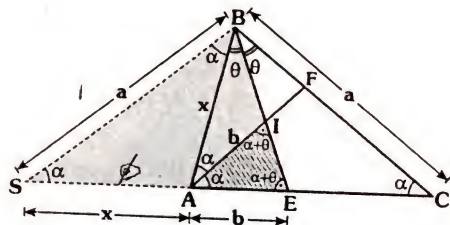
$$2x = a + b + 2(a + b)$$

$$\Rightarrow 2x = 3(a + b)$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}(a + b)$$

Clave **B**

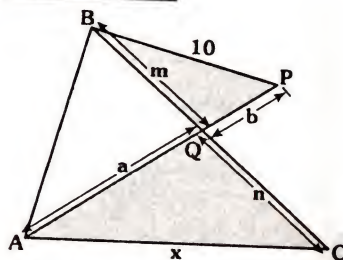
RESOLUCIÓN N° 73



- Se nos pide x .
- Por ángulo exterior:
 $m\angle AIE = m\angle IEA = \alpha + \theta$
 $\Rightarrow \triangle IEA$ es isósceles
 $\Rightarrow AI = IE = b$
- Se prolonga \overline{CA} y se traza \overline{BS} , tal que:
 $m\angle ABS = \alpha \Rightarrow m\angle BSA = \alpha$
- $\triangle SBC$: isósceles $\Rightarrow SB = BC = a$
- $\triangle ABE$: isósceles $\Rightarrow SE = SB$
 $x + b = a$
 $\therefore x = a - b$

Clave **B**

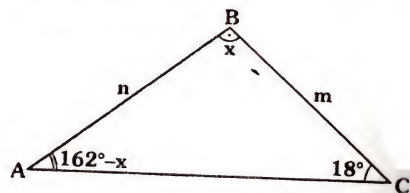
RESOLUCIÓN N° 74



- Dato: $AP = 11$ y $BC = 13$
- Es decir $a + b = 11$ y $m + n = 13$
- Por existencia en:
 $\triangle AQC$: $x < a + n$... (I)
 $\triangle BQP$: $10 < b + m$... (II)
- Sumando (I) y (II):
 $x + 10 < \frac{a+b}{11} + \frac{m+n}{13}$
 $\Rightarrow x < 14$
 $\therefore x_{(\text{máximo entero})} = 13$

Clave **D**

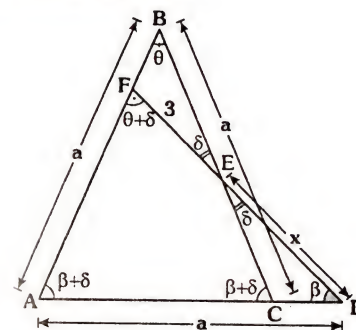
RESOLUCIÓN N° 75



- Piden: $x_{(\text{mínimo entero})}$
- Dato: $n > m$
- Por teorema de la correspondencia:
 $18^\circ > 162^\circ - x \Rightarrow x > 144^\circ$
 $\therefore x_{(\text{mínimo entero})} = 145^\circ$

Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 76

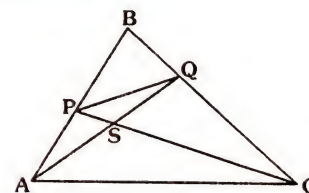


- Se nos pide el mínimo valor entero de x .
- Dato: " a " es entero y $\beta > \theta$
- Como $\beta < \theta \Rightarrow \beta + \delta > \theta + \delta$
- En $\triangle AFD$, por teorema de la correspondencia:
 $x + 3 > a \Rightarrow x > a - 3$
 $\therefore x_{(\text{mínimo entero})} = a - 2$

Clave **B**

Nota
La condición para " a " es que sea mayor que 3.

RESOLUCIÓN N° 77

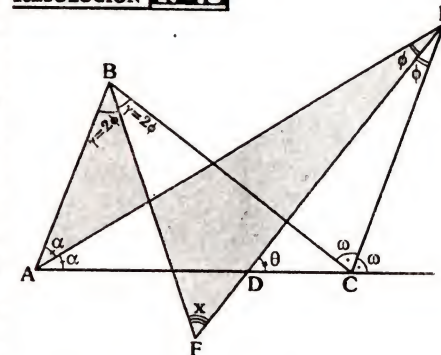


De acuerdo a las alternativas, nos piden la relación entre PQ , AC , AQ y PC .

- Por existencia en:
 $\triangle PSQ$: $PQ < PS + SQ$
 $\triangle ASC$: $AC < SC + AS$
 $\Rightarrow PQ + AC < (PS + SC) + (AS + SQ)$
 $\therefore PQ + AC < PC + AQ$

Clave **B**

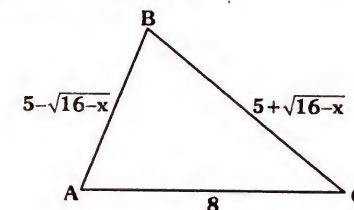
RESOLUCIÓN N° 78



- Piden x en función de θ .
- Por ángulo entre bisectrices, para el $\triangle ABC$ (teorema 27).
 $2\phi = \frac{(2\gamma)}{2} \Rightarrow \gamma = 2\phi$
- En $\triangle ADE$: $\theta = \alpha + \phi$
- En $\triangle ADE$: $x + \theta = \alpha + 2\phi \Rightarrow x = \alpha + \phi$
 $\therefore x = \theta$

Clave **E**

RESOLUCIÓN N° 79



- Nos piden la suma de todos los valores enteros de x .

- Analicemos todas las restricciones:

- En $\sqrt{16-x}$

$$\Rightarrow 16-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 16 \quad \dots (I)$$

- Cada lado tiene longitud positivo AC y BC ya lo son, garanticemos para AB:

$$5 - \sqrt{16-x} > 0$$

$$\Rightarrow 5 > \sqrt{16-x} \Rightarrow x+9 > 0$$

$$x > -9 \quad \dots (II)$$

- En $\triangle ABC$, se tiene $BC > AB$; por existencia:

$$BC - AB < 8 < BC + AB$$

$$2\sqrt{16-x} < 8 < 10$$

- Analicemos solo: $2\sqrt{16-x} < 8$; ya que $8 < 10$, siempre se cumple:

$$2\sqrt{16-x} < 8$$

$$\Rightarrow x > 0 \quad \dots (III)$$

- De (I), (II) y (III):

$$0 < x \leq 16$$

- Los valores que puede tomar x , son:

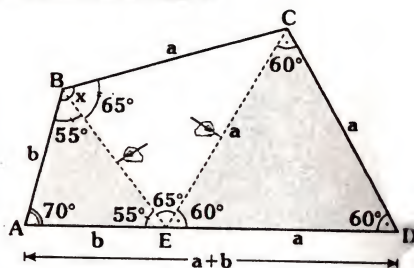
$$1, 2, 3, \dots, 15 \text{ y } 16$$

- Como nos piden la suma, por teorema:

$$S = \frac{(1+16)(16)}{2} = 136$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 80



- Piden x :

- Dato: $AD = AB + BC$ y $BC = CD$

- Ubicamos E en AD tal que:

$$ED = DC = a \Rightarrow AE = AB = b$$

- Como $m\angle EDC = 60^\circ$ y $ED = DC \Rightarrow$ el triángulo EDC es equilátero $\Rightarrow EC = a$

- Como $EC = CB \Rightarrow \triangle BCE$: isósceles

- En $\triangle BEC$: $m\angle AEB = m\angle ABE = 55^\circ$

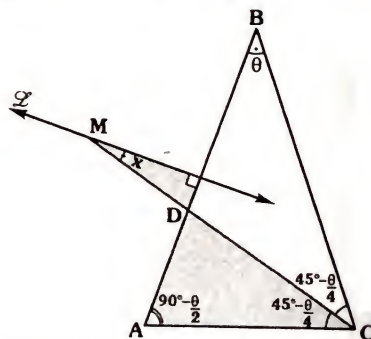
- En $\triangle BCE$: $m\angle CEB = m\angle ECB = 65^\circ$

$$\Rightarrow x = 55^\circ + 65^\circ$$

$$\therefore x = 120^\circ$$

Clave H

RESOLUCIÓN N° 81



- Piden x en función de θ

- Sea ℓ mediatriz de \overline{AB}

- $\triangle ABC$ isósceles ($AB = BC$)

$$m\angle BAC = m\angle BCA = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

- Como \overline{CD} es bisectriz del $\angle ACB$

$$\Rightarrow m\angle ACD = m\angle BCD = 45^\circ - \frac{\theta}{4}$$

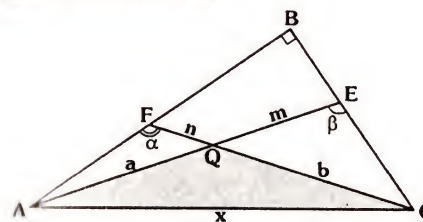
- En Σ :

$$x + 90^\circ = 90^\circ - \frac{\theta}{2} + 45^\circ - \frac{\theta}{4}$$

$$\therefore x = 45^\circ - \frac{3\theta}{4}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 82



- Nos piden la cantidad de valores enteros para x .

- Dato: $a + b = 10$

$$m + n = 4$$

- En $\triangle AQC$, por existencia:

$$x < a + b \Rightarrow x < 10 \quad \dots (I)$$

- Como $\alpha > 90^\circ$ y $\beta > 90^\circ$,

$$\text{En } \triangle AFC: x > n + b$$

$$\triangle AEC: x > m + a$$

$$\Rightarrow 2x > \frac{m+n}{4} + \frac{a+b}{10}$$

$$\Rightarrow x > 7 \quad \dots (II)$$

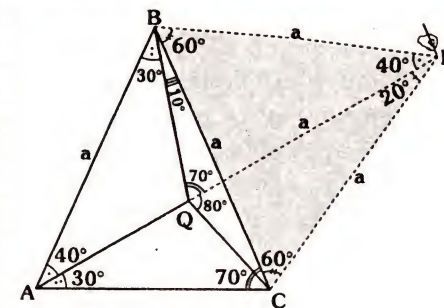
- De (I) y (II) se tiene:

$$7 < x < 10$$

- Los valores enteros de x son **8 y 9**

Clave B

RESOLUCIÓN N° 83



- Piden: $m\angle BQC$

- De acuerdo a los datos

$$m\angle BAC = m\angle BCA = 70^\circ \Rightarrow AB = BC$$

- Prolongamos \overline{AQ} y trazamos \overline{BF} tal que $m\angle AFB = 70^\circ$ (pues $m\angle BAQ = 40^\circ$ y $m\angle BQF = 70^\circ$ - ver criterios de trazos auxiliares)

$$\triangle ABF: \text{isósceles} \Rightarrow AB = BF = a$$

- Como $m\angle CBF = 60^\circ$ y $CB = BF = a \Rightarrow \triangle CBF$ es equilátero $\Rightarrow CF = a$ y $m\angle QFC = 20^\circ$.

- $\triangle FQC$ isósceles

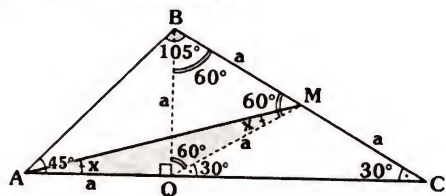
$$\Rightarrow m\angle FQC = m\angle QCF = 80^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle BQC = 70^\circ + 80^\circ$$

$$\therefore m\angle BQC = 150^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 84

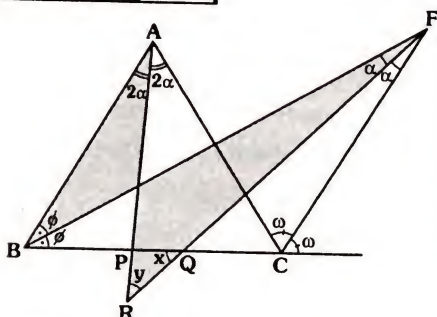


- Nos piden: x .
- Partimos así: se traza \overline{MQ} tal que $m\angle MQC = 30^\circ \Rightarrow \triangle QMC$ es isósceles ($QM = MC = a$) y $m\angle QMB = 60^\circ$ y como $QM = MB \Rightarrow \triangle QBM$ es equilátero $\Rightarrow BQ = a$ y $m\angle BQA = 90^\circ$

- Luego:
 $\triangle AQB$: isósceles $\Rightarrow AQ = QB = a$
- Como $AQ = QM \Rightarrow \triangle AQM$ es isósceles:
 $x + x = 30^\circ$
 $\therefore x = 15^\circ$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 85



- Piden que analicemos que tipo de triángulo es PQR
- En $\triangle BAC$, por ángulo entre bisectrices:

$$m\angle BFC = \frac{m\angle BAC}{2}$$

$$\Rightarrow m\angle BAC = 2(m\angle BFC)$$

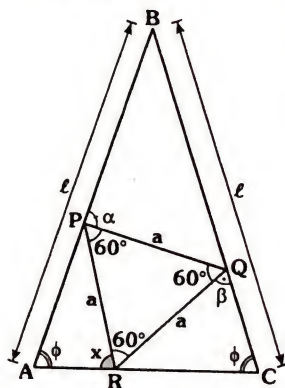
$$2\alpha$$

- En $\triangle FQB$: $x = \phi + \alpha$
- En $\triangle FQC$: $y + \alpha = \phi + 2\alpha$
 $\Rightarrow y = \phi + \alpha$
- Luego: $x = y$

$\therefore \triangle PQR$ es isósceles

Clave A

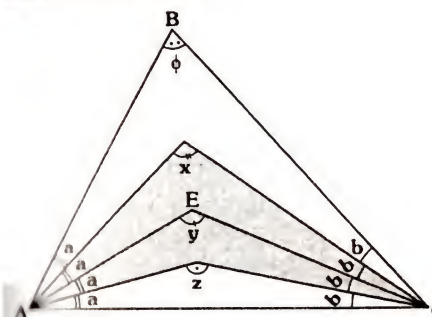
RESOLUCIÓN N° 86



- Piden: x en función de α y β .
- Dato: $\triangle ABC$ isósceles ($AB = BC$) y $\triangle PQR$ equilátero
- Por ángulo exterior, en:
 $\triangle RQC$: $x + 60^\circ = \beta + \phi$
 $\triangle ARP$: $x + \phi = 60^\circ + \alpha$
 $\Rightarrow 2x + 60^\circ + \phi = \beta + \alpha + 60^\circ + \phi$
 $\Rightarrow 2x = \alpha + \beta$
 $\therefore x = \frac{\alpha + \beta}{2}$

Clave B

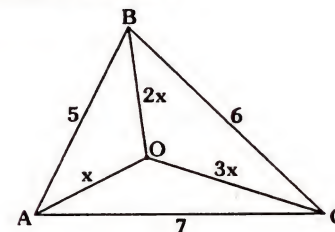
RESOLUCIÓN N° 87



- Piden $x + y + z$ en función de ϕ .
- En la región sombreada (teorema 29):
 $y = \frac{x + z}{2} \Rightarrow x + z = 2y$... (I)
- Sea $M = x + y + z$
- Reemplazando (I), tenemos:
 $M = 3y$... (II)
- Como \vec{AE} y \vec{CE} son bisectrices de los ángulos BAC y ACB , por teorema 25:
 $y = 90^\circ + \frac{\phi}{2}$
- En (II): $M = 3\left(90^\circ + \frac{\phi}{2}\right)$
 $\therefore M = 270^\circ + \frac{3}{2}\phi$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 88



- Nos piden la variación de x .
- Del teorema 42 y 50:

$$\frac{5+6+7}{2} < x + 2x + 3x < \frac{5+6+7}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{13}{6}$$

... (I)

Pero no es la única restricción, verifiquemos, por existencia.

- $\triangle AOB$: $2x - x < 5 < 2x + x$... (II)
- $\triangle AOC$: $3x - x < 7 < 3x + x$... (III)
- $\triangle BOC$: $3x - 2x < 6 < 3x + 2x$... (IV)

De (II), (III) y (IV):

$$\frac{7}{4} < x < \frac{7}{2}$$

... (V)

Por teorema 41:

- $x + 3x < 6 + 5$... (α)
- $x + 2x < 6 + 7$... (β)
- $2x + 3x < 5 + 7$... (θ)

De (α), (β) y (θ):

$$x < \frac{12}{5}$$

... (VI)

Finalmente:

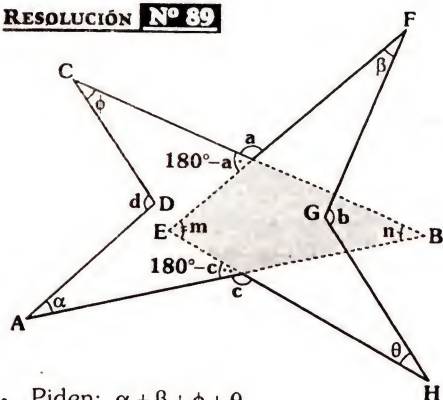
$$\frac{7}{4} < x < \frac{13}{6}$$

Es decir:

$$1,75 < x < 2,16$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 89

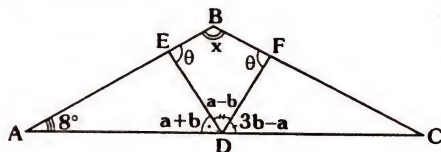


- Piden: $\alpha + \beta + \phi + \theta$
- Dato: $a + b + c + d = 518^\circ$
- En $\triangle ABCD$: $d = \alpha + \phi + n$... (I)
- En $\triangle HEFG$: $b = \beta + \theta + m$... (II)
- Sumando (I) y (II):
 $b + d = \alpha + \beta + \phi + \theta + m + n$... (III)
- En \triangle :
 $m + n = 180^\circ - a + 180^\circ - b$... (IV)
- Reemplazando (IV) en (III):
 $b + d = \alpha + \beta + \phi + \theta + 360^\circ - a - b$
 $\Rightarrow \underbrace{a + b + c + d}_{518^\circ} = \alpha + \beta + \phi + \theta + 360^\circ$

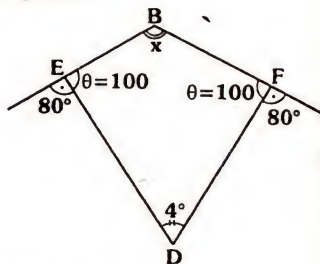
$$\therefore \alpha + \beta + \phi + \theta = 158^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 90



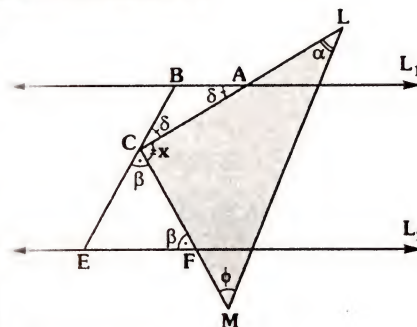
- Nos piden: x
- Dato b toma su mayor valor entero
- Analicemos b :
 $a - b > 0^\circ \Rightarrow a > b$... (I)
 $3b - a > 0^\circ \Rightarrow 3b > a$... (II)
 $a + b + a - b + 3b - a = 180^\circ$
 $\Rightarrow a + 3b = 180^\circ$... (III)
- En (I): $a > b \Rightarrow \frac{a + 3b}{180^\circ} > b + 3b$
 $\Rightarrow 45^\circ > b$... (α)
- En (II): $3b > a \Rightarrow 3b + 3b > \frac{a + 3b}{180^\circ}$
 $\Rightarrow b > 30^\circ$... (β)
- De (α) y (β): $30^\circ < b < 45^\circ$
Luego del dato: $b = 44^\circ$
- En (I): $a + 3(44^\circ) = 180^\circ \Rightarrow a = 48^\circ$
- En $\triangle AED$, por ángulo exterior:
 $\theta = 8^\circ + a + b$
 $\theta = 8^\circ + 48^\circ + 44^\circ \Rightarrow \theta = 100^\circ$
- Del gráfico:



- Por teorema 6:
 $x + 4^\circ = 80^\circ + 80^\circ$
 $\therefore x = 156^\circ$

Clave B

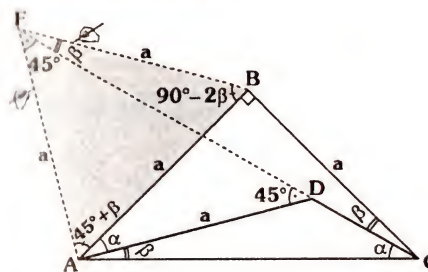
RESOLUCIÓN N° 91



- Piden $\alpha + \phi$
- En $\triangle MCL$: $\alpha + \phi + x = 180^\circ$... (a)
- $\triangle FCE$ y $\triangle ABC$: isósceles
- También: $x + \beta + \delta = 180^\circ$... (I)
- Por teorema de las paralelas:
 $x = \beta + \phi$... (II)
- De (I) y (II): $x + x = 180^\circ \Rightarrow x = 90^\circ$
- En (a): $\alpha + \phi + 90^\circ = 180^\circ$
 $\therefore \alpha + \phi = 90^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 92



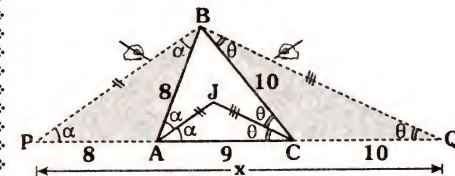
- Nos piden α
- Como $AB = BC \Rightarrow \alpha + \beta = 45^\circ$... (I)

- Se prolonga \overline{CD} y se traza \overline{BF} tal que $BF = BC = a \Rightarrow m\angle BFC = \beta$ y $m\angle FBA = 90^\circ - 2\beta$
- Se tendrá luego $BF = BA = a$
 $\Rightarrow m\angle BFA = m\angle BAF = 45^\circ + \beta$
 $\Rightarrow m\angle DFA = 45^\circ$
- Como:
 $m\angle DFA = m\angle ADF \Rightarrow AF = AD = a$
 $\triangle AFB$: equilátero $\Rightarrow 45^\circ + \beta = 60^\circ$
 $\Rightarrow \beta = 15^\circ$

$$\therefore \alpha = 30^\circ$$

Clave A

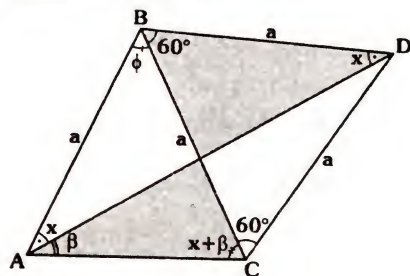
RESOLUCIÓN N° 93



- Nos piden: x
- Por dato: $\overline{AJ} \parallel \overline{PB}$ y $\overline{CJ} \parallel \overline{QB}$
 $\Rightarrow \triangle PAB$ y $\triangle CBQ$: isósceles
 $\Rightarrow AP = AB = 8$ y $CB = CQ = 10$
 $\Rightarrow x = 8 + 9 + 10$
 $\therefore x = 27$

Clave D

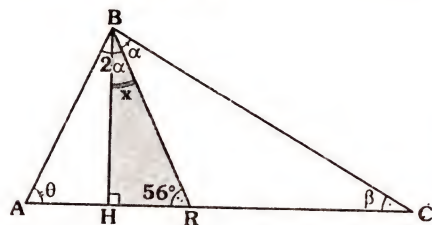
RESOLUCIÓN N° 94



- Piden: x
- Dato: $\phi - \beta = 10^\circ$
- ΔBCD es equilátero
- ΔABC isósceles ($AB=BC$)
 $\Rightarrow m\angle BAC = m\angle ACB = x + \beta$
- En la parte sombreada (Δ):
 $x + \beta + \beta = x + 60^\circ$
 $\Rightarrow \beta = 30^\circ$
- Del dato: $\phi - \beta = 10^\circ \Rightarrow \phi = 40^\circ$
- En ΔABD :
 $x + x + 60^\circ + \phi = 180^\circ$
 $\therefore x = 40^\circ$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 95

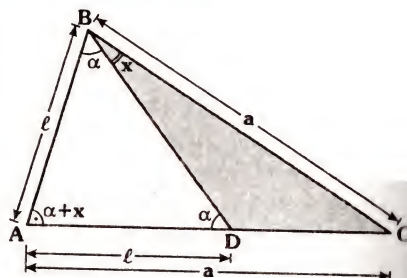


- Piden x :

- Dato: $\theta - 2\beta = 12^\circ$
- Del dato: $\theta = 12^\circ + 2\beta$
 $\Delta ABC: 3\alpha + \underbrace{(12^\circ + 2\beta)}_{\theta} + \beta = 180^\circ$
 $\Rightarrow \alpha + \beta = 56^\circ$
- ΔHBR : $x + 56^\circ = 90^\circ$
 $\therefore x = 34^\circ$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 96

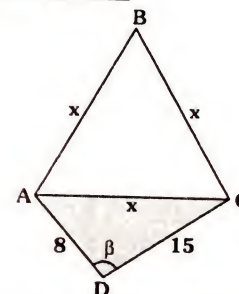


- Piden el mayor valor entero de x .
- Dato: $AB=AD$ y $AC=BC$
 ΔABD y ΔDBC : isósceles
- En ΔABD : $3\alpha + x = 180^\circ$
- En ΔBCD : $x < \alpha$
 $\Rightarrow 3x < 3\alpha$
 $4x < \frac{3\alpha + x}{180^\circ}$
 $x < 45^\circ$

\therefore El mayor valor entero de x es 44°

Clave C

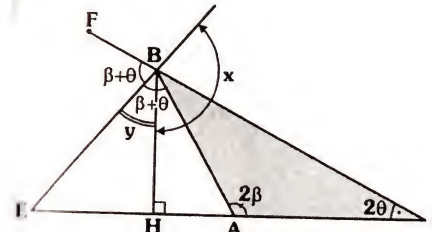
RESOLUCIÓN N° 97



- Piden el menor valor entero del perímetro de ΔABC .
Perím $_{\Delta ABC} = 3x$
- En ΔADC , por existencia
 $15 - 8 < x < 15 + 8 \Rightarrow 7 < x < 23 \dots (I)$
- Como: $\beta > 90^\circ \Rightarrow x > 15 \dots (II)$
- Por teorema 21:
 $x^2 > 8^2 + 15^2 \Rightarrow x > 17 \dots (III)$
- De (I), (II) y (III):
 $17 < x < 23$
 $\Rightarrow 51 < 3x < 69$
 $51 < \text{perím}_{(\Delta ABC)} < 69$
- \therefore El menor valor entero del perímetro de ΔABC es 52.

Clave C

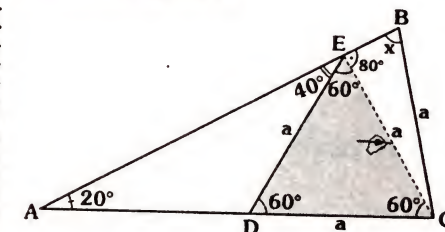
RESOLUCIÓN N° 98



- Piden: x
- Dato: $2\beta - 2\theta = 112^\circ$
 $\Rightarrow \beta - \theta = 56^\circ$
- Como \overline{BE} es bisectriz exterior:
 $m\angle FBE = m\angle EBA = \beta + \theta$
- También: $m\angle HBA = \beta + \theta - y$
- En ΔHBA , por ángulo exterior:
 $2\beta = 90^\circ + \beta + \theta - y$
 $y + \underbrace{\beta - \theta}_{56^\circ} = 90^\circ$
 $\Rightarrow y = 34^\circ$
- Como: $x + y = 180^\circ$
 $\therefore x = 146^\circ$

Clave B

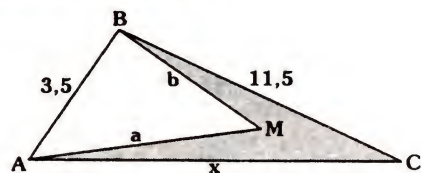
RESOLUCIÓN N° 99



- Piden: x
- Dato: $ED = DC = BC$
- Como $m\angle EDC = 60^\circ$ y $ED=DC$, al trazar \overline{BC} , el triángulo EDC es equilátero $\Rightarrow EC = a$ y $m\angle BEC = 80^\circ$
- ΔEBC isósceles:
 $\therefore x = 80^\circ$

Clave D

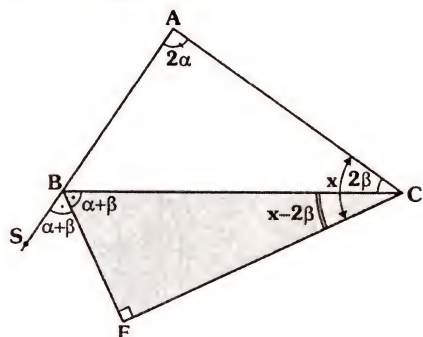
RESOLUCIÓN N° 100



- Nos piden la cantidad de valores enteros de x .
- Dato: $a + b = 20$
- $\triangle ABC$: existencia
 $11,5 - 3,5 < x < 11,5 + 3,5 \Rightarrow 8 < x < 15 \dots (I)$
- Por teorema 41:
 $\frac{a+b}{20} < x + 11,5 \Rightarrow 8,5 < x \dots (II)$
- De (I) y (II):
 $8,5 < x < 15$
- Los valores enteros de x son:
 $\{9; 10; 11; 12; 13; 14\}$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 101

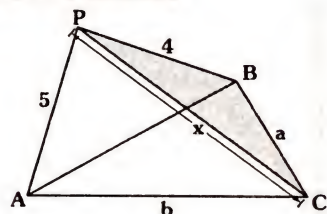


- Piden: x
- Dato: $2\alpha - 2\beta = 140^\circ$
 $\Rightarrow \alpha - \beta = 70^\circ \dots (I)$

- Como \overline{BF} es bisectriz de $\angle CBS$:
 $m\angle SBF = m\angle FBC = \alpha + \beta$
- En $\triangle BFC$:
 $x - 2\beta + \alpha + \beta = 90^\circ$
 $\Rightarrow x + \underbrace{\alpha - \beta}_{70^\circ} = 90^\circ$
 $\therefore x = 20^\circ$

Clave A

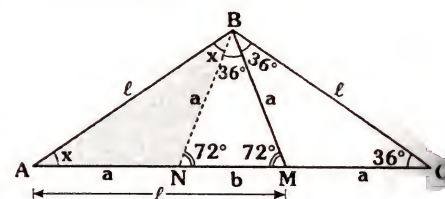
RESOLUCIÓN N° 102



- Piden el mayor valor entero de PC .
- Dato: $a + b = 11$
- Por existencia en:
 $\triangle PBC: x < a + 4 \dots (I)$
 $\triangle APC: x < b + 5 \dots (II)$
- Sumando (I) y (II):
 $2x < \underbrace{a+b}_{11} + 9 \Rightarrow x < 10$
- Por lo tanto el mayor valor entero de x es 9.

Clave D

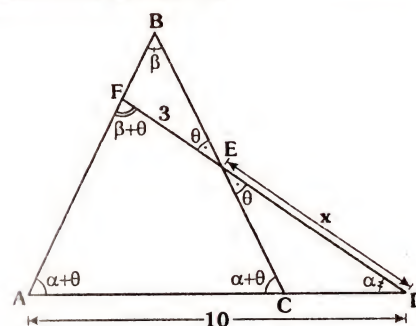
RESOLUCIÓN N° 103



- Piden: x
- Dato: $AM = BC$ y $BM = MC$
- Se traza \overline{BN} , tal que $m\angle BNM = 72^\circ$
 $\Rightarrow \triangle NBM$ y $\triangle BCM$ isósceles
 $\Rightarrow NB = BM = MC = a$
 $\triangle NBC$: isósceles $\Rightarrow l = a + b$
- Como $AM = l$ y $NM = b \Rightarrow AN = a$
 $\triangle ANB$: isósceles
 $x + x = 72^\circ$
 $\therefore x = 36^\circ$

Clave B

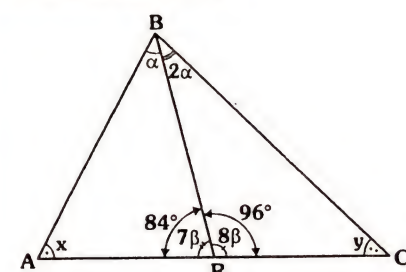
RESOLUCIÓN N° 104



- Nos piden el mínimo valor entero de x
- Dato: $\alpha > \beta$
- Como
 $AB = BC \Rightarrow m\angle BAC = m\angle ACB = \alpha + \theta$
- Como $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \theta > \beta + \theta$, en el $\triangle AFC$, por teorema de la correspondencia.
 $x + 3 > 10 \Rightarrow x > 7$
 $\therefore x_{(\text{mínimo entero})} = 8$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 105



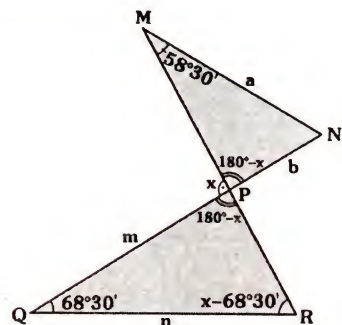
- Nos piden la medida del menor ángulo interior del $\triangle ABC$.
- Dato: $\triangle ABC$ escaleno, $x < 74^\circ$, $y < 74^\circ$ y $3\alpha < 74^\circ$
 $x, y, (3\alpha) \in \mathbb{Z}^+$
 $7\beta + 8\beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 12^\circ$
- Del dato: $3\alpha < 74^\circ \Rightarrow \alpha < \frac{74^\circ}{3}$
- En $\triangle ABR$: $x + \alpha = 96^\circ$
- Como: $\alpha < \frac{74^\circ}{3} \Rightarrow \frac{x + \alpha}{96^\circ} < \frac{74^\circ}{3} + x$
 $\Rightarrow 71,3^\circ < x$
- Del dato: $71,3^\circ < x < 74^\circ$
- Los valores enteros de x son 72° y 73° con ello tenemos los siguientes triángulos:



- El único triángulo escaleno es el segundo, ya que el primero es isósceles
- Por lo tanto la medida del menor ángulo es 38° .

Clave C

RESOLUCIÓN N° 106



- Nos piden el mayor valor entero de x
- Dato: $a > b$ y $m < n$
- En $\triangle PQR$ y $\triangle MNP$:

$$x > 68^\circ 30' \wedge x > 58^\circ 30'$$

$$\Rightarrow x > 68^\circ 30' \quad \dots (I)$$

- Por teorema de la correspondencia:

$$- a > b \Rightarrow 180^\circ - x > 58^\circ 30'$$

$$\Rightarrow 121^\circ 30' > x \quad \dots (II)$$

$$- m < n \Rightarrow x - 68^\circ 30' < 180^\circ - x$$

$$\Rightarrow x < 124^\circ 15' \quad \dots (III)$$

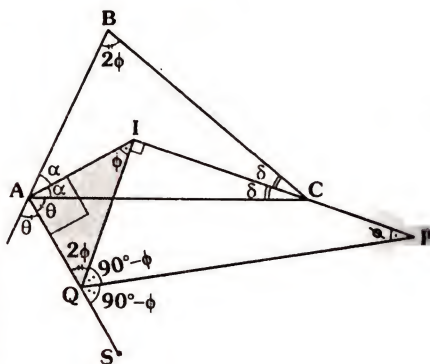
- De (I), (II) y (III):

$$68^\circ 30' < x < 121^\circ 30'$$

$$\therefore x_{(\text{mayor entero})} = 121^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 107



- Nos piden: ϕ
- Como \overline{AI} y \overline{AQ} son bisectrices
 $\Rightarrow m\angle QAI = 90^\circ$
- En $\triangle ABC$, por ángulo entre bisectrices (teorema 25)

$$m\angle AIC = 90^\circ + \frac{(2\phi)}{2} = 90^\circ + \phi$$

$$\Rightarrow m\angle AIQ = \phi$$

- En $\triangle AIQ$: como \overline{QP} es bisectriz

$$\Rightarrow m\angle IQP = m\angle PQS = 90^\circ - \phi$$

$$\Rightarrow m\angle AQI = 2\phi$$

- En $\triangle AIQ$: $\phi + 2\phi = 90^\circ$

$$\therefore \phi = 30^\circ$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 108

- Tenemos la ecuación:
 $x^3 - 7x^2 + 12x - nx^2 + 7nx - 12n = 0$
- Por dato las raíces representan las longitudes de los lados de un triángulo

Nos piden la suma de los valores enteros de n .

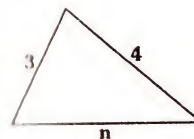
Factorizando:

$$x(x^2 - 7x + 12) - n(x^2 - 7x + 12) = 0$$

$$= 0$$

$$(x - n)(x - 3)(x - 4) = 0$$

Las raíces son: n , 3 y 4:



- Por existencia:
 $1 < n < 7$

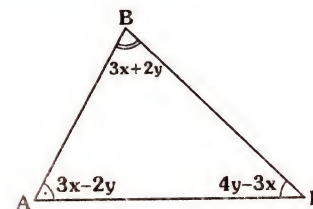
Los valores entero de n , son:
{2, 3, 4, 5, 6}

$$\Rightarrow S = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

$$\therefore S = 20$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 109



- Nos piden el menor valor entero de y múltiplo de 3.
- Del gráfico, tendremos las siguientes restricciones:

$$3x - 2y > 0 \Rightarrow 3x > 2y \quad \dots (I)$$

$$4y - 3x > 0 \Rightarrow 4y > 3x \quad \dots (II)$$

- En $\triangle ABD$:

$$3x - 2y + 3x + 2y + 4y - 3x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3x + 4y = 180^\circ$$

- En (I): $\frac{3x + 4y}{180^\circ} > 2y + 4y$

$$30^\circ > y \quad \dots (\alpha)$$

- En (II): $4y + 4y > \frac{3x + 4y}{180^\circ}$

$$y > \frac{45^\circ}{2} \quad \dots (\beta)$$

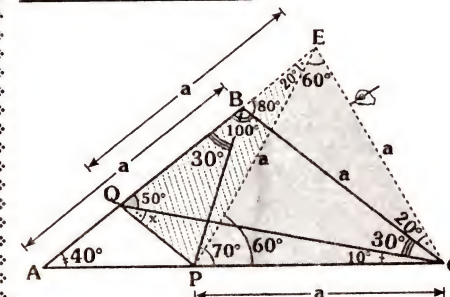
- De (α) y (β) :

$$\frac{45^\circ}{2} < y < 30^\circ$$

- Por lo tanto el menor valor de y , múltiplo de 3 es 24° .

Clave B

RESOLUCIÓN N° 110



- Nos piden el menor valor entero de y múltiplo de 3.
- Del gráfico, tendremos las siguientes restricciones:

- Nos piden: x

- De los datos: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{PC}$

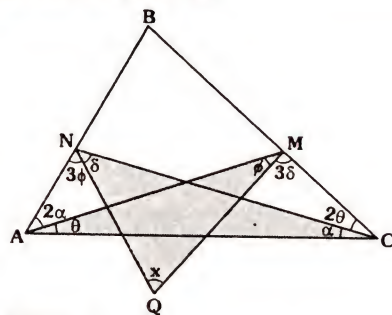
- Se prolonga \overline{AB} y se traza \overline{CE} tal que $m\angle AEC = 80^\circ \Rightarrow \triangle BCE$ y

$$\triangle QEC : \text{isósceles} \Rightarrow EC = QE = a$$

- Como $m\angle PCE = 60^\circ$ y $PC = EC \Rightarrow$ el $\triangle PCE$ es equilátero.
 $\Rightarrow PE = a$ y $m\angle QEP = 20^\circ$
- Como: $QE = EP \Rightarrow \triangle QPE$ isósceles
 $\Rightarrow m\angle EQP = m\angle QPE = 80^\circ$
 $50^\circ + x = 80^\circ$
 $\therefore x = 30^\circ$

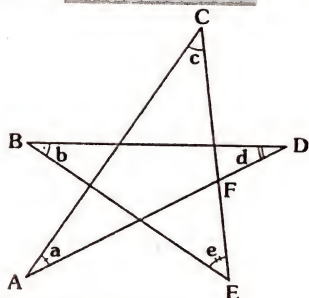
Clave C

RESOLUCIÓN N° 111



- Piden: x

Observación



- En el gráfico se cumple:
 $a + b + c + d + e = 180^\circ$

Demostración:

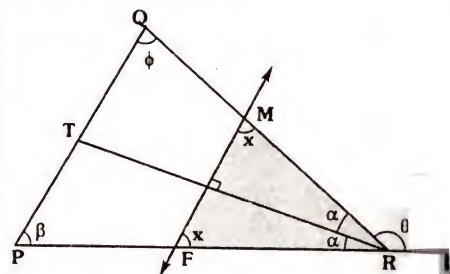
$$\angle BDFE: m\angle DFE = b + d + e$$

$$\triangle ACF: a + c + d + e = 180^\circ$$

- De la observación:
 $x + \theta + \alpha + \phi + \delta = 180^\circ \quad \dots (I)$
- En $\triangle AMC$ y $\triangle ANC$:
 $3\delta + 3\theta + \alpha + \phi = 180^\circ \quad \dots (II)$
 $3\phi + 3\alpha + \delta + \theta = 180^\circ \quad \dots (III)$
- Sumando (II) y (III):
 $4(\delta + \theta + \alpha + \phi) = 360^\circ$
 $\Rightarrow \delta + \theta + \alpha + \phi = 90^\circ \quad \dots (IV)$
- De (IV) y (I):
 $x + 90^\circ = 180^\circ$
 $\therefore x = 90^\circ$

Clave A

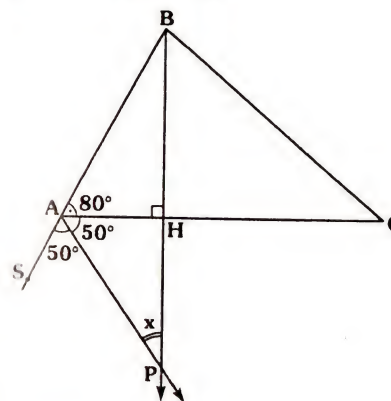
RESOLUCIÓN N° 112



- Nos piden: x
- Dato: $\beta + \phi = \theta$
- Como: $x + \alpha = 90^\circ \Rightarrow m\angle RFM = x$
- $\triangle PQR$: por ángulo exterior
 $m\angle LRQ = \beta + \phi \Rightarrow m\angle LRQ = \theta$
- $\triangle FMR$:
 $x + x = \theta$
 $\therefore x = \frac{\theta}{2}$

Clave M

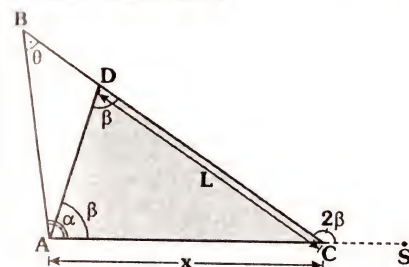
RESOLUCIÓN N° 113



- Piden: x
- Dato: $m\angle ABC + m\angle ACB = 100^\circ$
 $\Rightarrow m\angle BAC = 80^\circ$
- Como \overline{AP} es bisectriz
 $\Rightarrow m\angle SAP = m\angle CAP = 50^\circ$
- En $\triangle AHP$: $x + 50^\circ = 90^\circ$
 $\therefore x = 40^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 114

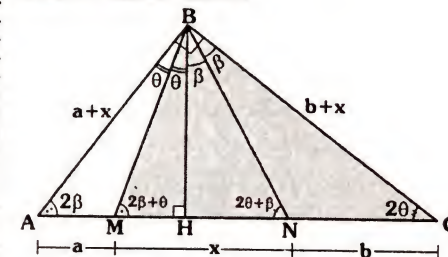


- Piden: x
- Dato: $CD = L$ y $\alpha + \theta = 2\beta$

- Por ángulo exterior en:
 $\triangle ABC: m\angle SCB = \alpha + \theta$
 $\Rightarrow m\angle DCS = 2\beta$
- $\triangle ADC: m\angle CAD + \beta = 2\beta$
 $\Rightarrow m\angle CAD = \beta$
 $\Rightarrow \triangle ADC$: isósceles
 $\therefore x = L$

Clave A

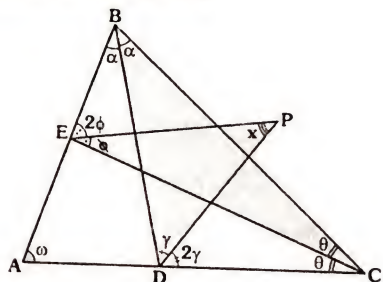
RESOLUCIÓN N° 115



- Piden: x
- Dato: $AB + BC - AC = k$
- En $\triangle ABC$:
 $m\angle BAC = m\angle HBC = 2\beta$
 $m\angle ACB = m\angle HBA = 2\theta$
- Como: $m\angle ANB = m\angle ABN$ y
 $m\angle NMB = m\angle MBC$
 $\Rightarrow \triangle ABN$ y $\triangle MBC$: isósceles
 $\Rightarrow AB = a + x$ y $BC = b + x$
- En el dato:
 $(a + x) + (b + x) - (a + b + x) = k$
 $\therefore x = k$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 116



- Nos piden: x
- En la región sombreada, de la observación del problema 111.

$$x + \theta + \gamma + \phi + \alpha = 180^\circ \quad \dots (I)$$

En $\triangle EBC$ y $\triangle BDC$:

$$3\phi + 2\alpha + \theta = 180^\circ \quad \dots (II)$$

$$3\gamma + 2\theta + \alpha = 180^\circ \quad \dots (III)$$

Sumando (II) y (III):

$$3(\theta + \gamma + \phi + \alpha) = 360^\circ$$

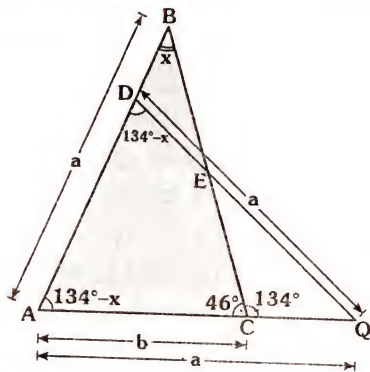
$$\Rightarrow \theta + \gamma + \phi + \alpha = 120^\circ$$

En (I): $x + 120^\circ = 180^\circ$

$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 117



- Piden el valor entero de x
- Como: $C \in \overline{AQ} \Rightarrow a > b$
- $\triangle ACQ$ por teorema de la correspondencia:
 $b < a \Rightarrow x < 46^\circ \quad \dots (I)$

$\triangle QAD$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle QAD = m\angle ADQ = 134^\circ - x$

También se cumple (por teorema 17)
 $134^\circ - x < 90^\circ \Rightarrow 44^\circ < x \quad \dots (II)$

De (I) y (II):
 $44^\circ < x < 46^\circ$

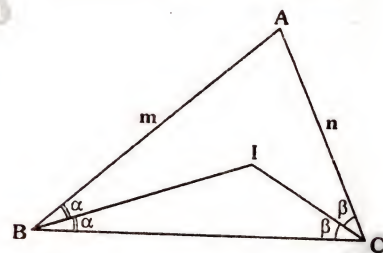
El valor entero de x es 45° .

Clave D

RESOLUCIÓN N° 118

- Analicemos las proposiciones:

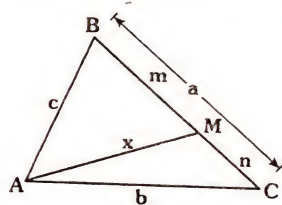
(I)



Como: $m > n \Rightarrow 2\beta > 2\alpha$
 $\Rightarrow \beta > \alpha$

En $\triangle AIC$: $\beta > \alpha \Rightarrow IB > IC$
La proposición es verdadera.

(II)



Sea: $p = \frac{a+b+c}{2}$

En $\triangle ABM$ y $\triangle AMC$:

$$x < b + n$$

$$x < c + m$$

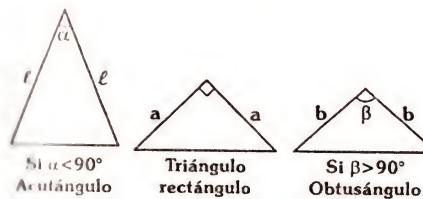
$$2x < b + c + \frac{m+n}{a}$$

$$\Rightarrow x < \frac{a+b+c}{2}$$

$$x < p$$

La proposición es verdadera.

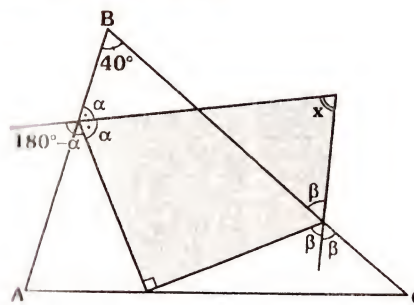
(III) Si un triángulo es isósceles, este puede ser acutángulo, rectángulo u obtusángulo, así tenemos:



La proposición es F.

Clave A

RESOLUCIÓN N° 119



Nos piden: x

En la región sombreada, por teorema 6
 $x + 90^\circ = 180^\circ - \alpha + \beta$

$$x = 90^\circ + \beta - \alpha \quad \dots (I)$$

En \triangle :

$$x + \beta = 40^\circ + \alpha \quad \dots (II)$$

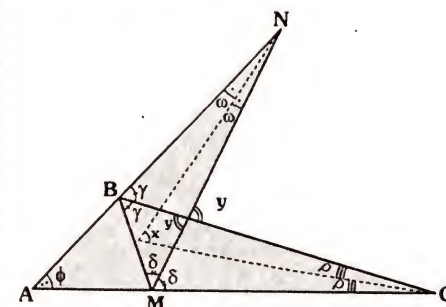
Sumando (I) y (II):

$$2x = 130^\circ$$

$$\therefore x = 65^\circ$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 120



Nos piden x en función de ϕ

En \triangle por teorema 29:

$$x = \frac{\phi + y}{2} \quad \dots (I)$$

En $\triangle ABM$, por ángulo entre bisectrices (teorema 26):

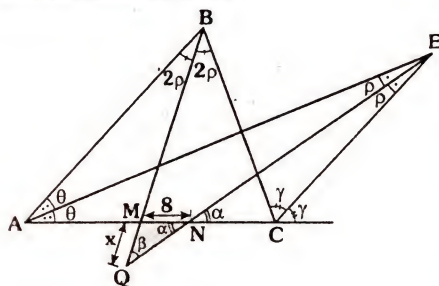
$$y = 90^\circ - \frac{\phi}{2}$$

En (I):

$$x = 45^\circ + \frac{\phi}{4}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 121



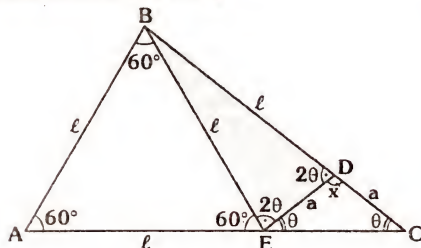
- Piden: x
- Dato: $MN = 8$
- Por ángulo entre bisectrices, en el $\triangle ABC$ (teorema 27), en $\triangle ABC$:

$$m\angle AEC = \frac{m\angle ABC}{2}$$

$$\Rightarrow m\angle ABM = m\angle MBC = 2p$$
- Como \overline{EN} es bisectrices del $\angle AEC$
 $m\angle AEN = m\angle NEC = p$
- En $\triangle AEN$: $\alpha = \theta + p \quad \dots (I)$
- En $\triangle QMN$:
 $\theta + 2p = \beta + p \Rightarrow \beta = \theta + p \quad \dots (II)$
- De (I) y (II):
 $\alpha = \beta \Rightarrow \triangle QMN$: isósceles
 $\therefore x = 8$

Clave B

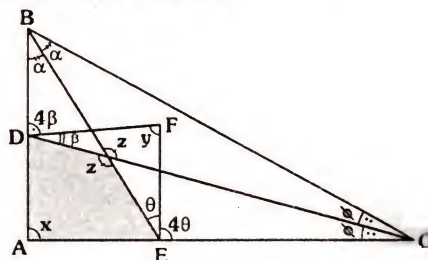
RESOLUCIÓN N° 122



- Piden: x
- Como: $AB = AE$ y $m\angle BAE = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABE$ es equilátero $\Rightarrow BE = \ell$ y $m\angle AEB = 60^\circ$
- $\triangle EBD$: isósceles
- Se tiene: $x + 2\theta = 180^\circ \quad \dots (I)$
- También: $\theta + 2\theta + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta = 40^\circ$
- En (I): $x + 2(40^\circ) = 180^\circ$
 $\therefore x = 100^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 123



- Nos piden: x
- Dato: $x + y = 180^\circ$
- En $\triangle DFEA$, por teorema 6:

$$\frac{x + y}{180^\circ} = \frac{4\beta + 4\theta}{180^\circ} \Rightarrow \beta + \theta = 45^\circ$$
- En $\triangle ABC$ por ángulo entre bisectrices (teorema 25):

$$z = 90^\circ + \frac{x}{2} \quad \dots (I)$$
- En la región sombreada (teorema 6)

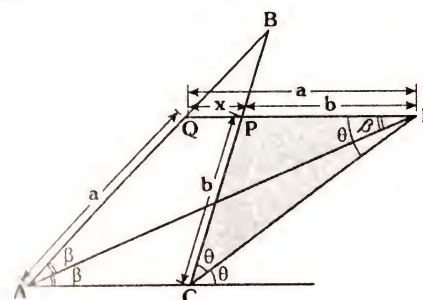
$$x + z = 5\beta + 5\theta$$

$$\Rightarrow x + 90^\circ + \frac{x}{2} = 5(\beta + \theta)$$

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave C

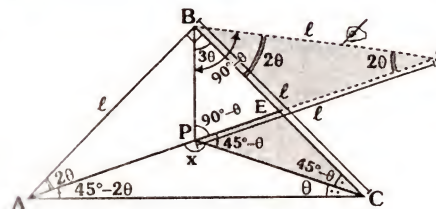
RESOLUCIÓN N° 124



- Piden: x
- Dato: $a - b = \ell$ y $\overline{QE} \parallel \overline{AC}$
- Por ángulo entre paralelas:
 $m\angle QEA = \beta$ y $m\angle CEP = \theta$
- $\triangle CPE$ y $\triangle AQE$: isósceles
 $\Rightarrow AQ = QE = a$ y $CP = PE = b$
 $\Rightarrow x = a - b$
 $\therefore x = \ell$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 125

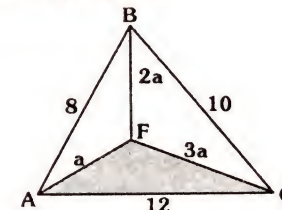


- Piden: x
- Dato: $AB = BC$
- En $\triangle APC$: $x + 45^\circ - \theta = 180^\circ$
 $\Rightarrow x = 135^\circ + \theta \quad \dots (I)$

- Se prolonga AP ($m\angle BPE = 90^\circ - \theta$) y se traza BS tal que $m\angle BSP = 2\theta$
 $\Rightarrow \triangle ABS$ y $\Rightarrow \triangle PBS$ son isósceles
 $AB = BS = PS = \ell$
- Como $PS = BC$ y $\triangle PEC$ isósceles
 $\Rightarrow BE = ES \Rightarrow \triangle BES$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle EBS = 2\theta$
- $m\angle PBS$: $3\theta + 2\theta = 90^\circ - \theta$
 $\Rightarrow \theta = 15^\circ$
- En (I): $x = 135^\circ + 15^\circ$
 $\therefore x = 150^\circ$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 126



- Analicemos "a" para ello encontremos el menor intervalo para "a".
- Por existencia:

$$2a - a < 8 < 2a + a$$

$$3a - 2a < 10 < 3a + 2a$$

$$3a - a < 12 < 3a + a$$

$$\Rightarrow 3 < a < 6 \quad \dots (I)$$
- Por teorema 50:

$$a + 2a + 3a < \overbrace{10 + 12}^{\text{Dos mayores}}$$

$$\Rightarrow a < \frac{11}{3} \quad \dots (II)$$

- Por teorema 41:

$$\begin{aligned} a + 2a &< 12 + 10 \\ 2a + 3a &< 8 + 12 \\ a + 3a &< 8 + 10 \\ \Rightarrow a &< 4 \end{aligned}$$

... (γ)

De (α), (β) y (γ):

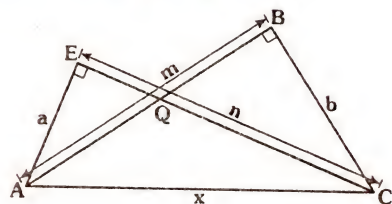
$$3 < a < \frac{11}{3}$$

Ahora busquemos, la expresión pedida:

$$\begin{aligned} 24 &< 4a + 12 < \frac{80}{3} \\ 24 &< \text{Perim.}_{(\triangle AFC)} < 26,6 \end{aligned}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 127



- Nos piden la suma de valores de x.
- Dato: $m + n = 12$; $a + b = 6$; $m > b$ y $n > a$.
- En $\triangle AEC$ y $\triangle ABC$:
 - $x > n$... (I)
 - $x > m$... (II)

- Sumando (I) y (II):

$$2x > \frac{m+n}{2} \Rightarrow x > 6$$
- Por existencia; en:
 - $\triangle AEC$: $x < a + n$... (III)
 - $\triangle ABC$: $x < b + m$... (IV)
- Sumando (III) y (IV):

$$2x < \frac{a+b}{2} + \frac{m+n}{2} \Rightarrow x < 9$$
- Luego se tendrá: $6 < x < 9$
- Los valores enteros de x, son: 7 y 8
- Por lo tanto, la suma de valores enteros de x, es 15.

Clave C

Nota

Nos faltaría la restricción, para los triángulos rectángulos.
Se plantearía, el siguiente teorema:

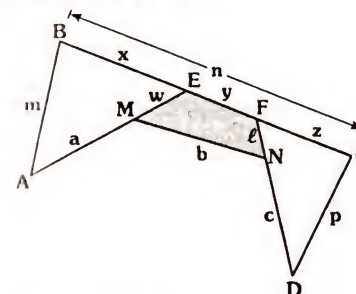
$$MC > MA$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + n^2}{2}} \geq \frac{a+n}{2} \text{ y } \sqrt{\frac{b^2 + m^2}{2}} \geq \frac{b+m}{2}$$

Con esto se llega: $x \geq \frac{9\sqrt{2}}{2} \approx 6,36$

Los valores obtenidos no varían.

RESOLUCIÓN N° 128



- Dato: $n - b = k$
- Analicemos las relaciones entre a; b; c; m; n; y p.
- Por existencia en:
 - $\triangle ABE$: $a + w < m + x$... (I)
 - $\triangle DEC$: $c + \ell < p + z$... (II)
- Por teorema 54:

$$b < w + y + \ell \text{ ... (III)}$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$a + b + c + w + \ell < m + p + x + y + z + w + \ell$$

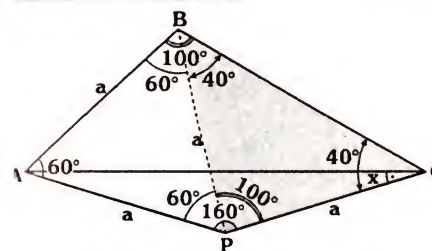
$$\Rightarrow a + b + c < m + n + p$$

$$a + c < m + p + \frac{n-b}{k}$$

$$\therefore a + c < m + p + k$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 129



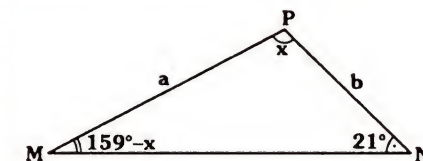
- Piden: x
- Como $AB = AP$ y $m\angle BAP = 60^\circ \Rightarrow$ al trazar \overline{BP} , el triángulo ABP es equilátero $\Rightarrow m\angle PBC = 40^\circ$; $BP = a$ y $m\angle BPC = 100^\circ \Rightarrow m\angle PCB = 40^\circ$
 $\Rightarrow \triangle BCP$ es isósceles $\Rightarrow PC = a$
- Del gráfico:

$$x + x + 160^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore x = 10^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 130



- Nos piden el mínimo valor entero de x
- Dato: $a > b$
- Por teorema de la correspondencia:

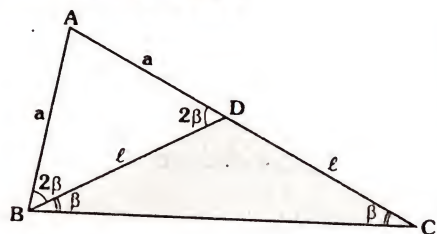
$$21^\circ > 159^\circ - x$$

$$\Rightarrow x > 138^\circ$$

$$\therefore x_{(\text{mínimo entero})} = 139^\circ$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 131

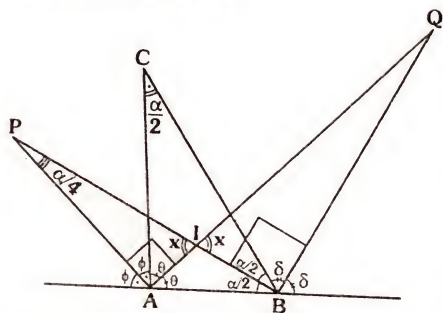


- Piden: $m\angle B$ en función de $m\angle C$
- Sea $m\angle C = \beta$
- $\triangle BDC$ y $\triangle BAD$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle DBC = m\angle BCD = \beta$
 $m\angle ABD = m\angle ADB = 2\beta$
 $\Rightarrow m\angle B = 3\beta$
 $\therefore m\angle B = 3(m\angle C)$

Clave C

Nota
En este problema se ha considerado la notación $m\angle C$, la cual hace referencia a $m\angle ACB$ y $m\angle B = m\angle ABC$.

RESOLUCIÓN N° 132

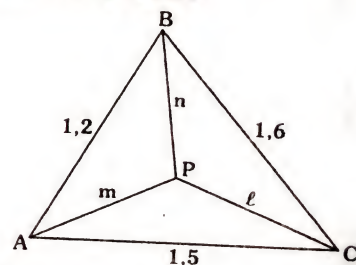


- Piden: x

- Se tiene entonces:
 $m\angle PAQ = m\angle PBQ = 90^\circ$
- Por ángulo entre bisectrices (teorema 27)
 $m\angle APB = \frac{\alpha}{4}$
- En $\triangle IAP$: $x + \frac{\alpha}{4} = 90^\circ$
 $\therefore x = 90^\circ - \frac{\alpha}{4}$

Clave D

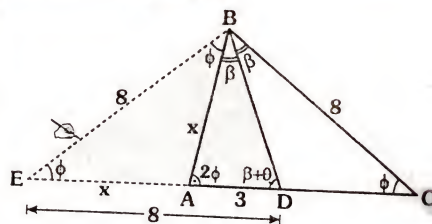
RESOLUCIÓN N° 133



- Nos piden el valor de: $m + n + l$ por teorema 42 y 50:
 $\frac{1.2 + 1.6 + 1.5}{2} < m + n + l < 1.6 + 1.5$
 $2.1 < m + n + l < 3.1$
- Por lo tanto el valor entero de $m + n + l$ es 3.

Clave A

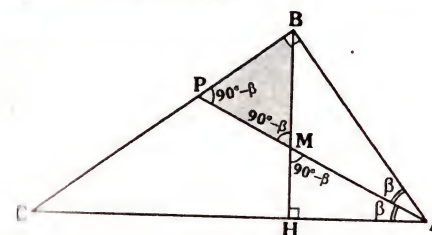
RESOLUCIÓN N° 134



- Nos piden: AB
- De acuerdo a los criterios de trazos auxiliares. Se prolonga \overline{CA} y se traza \overline{BE} tal que $m\angle BEC = \phi \Rightarrow \triangle ABE$ y $\triangle EBD$ son isósceles.
 $\Rightarrow EB = BC = 8$ y $EA = AB = x$
- Como: $m\angle EBC = m\angle EDB = \beta + \phi$
 $\Rightarrow x + 3 = 8$
 $\therefore x = 5$

Clave C

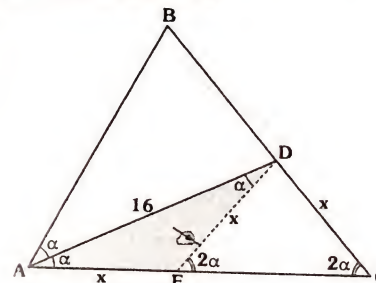
RESOLUCIÓN N° 135



- Nos piden verificar que tipo de triángulo es MBP.
- En $\triangle HMA$: $m\angle AMH = 90^\circ - \beta$
- En $\triangle ABP$: $m\angle BPA = 90^\circ - \beta$
- Por lo tanto el triángulo MBP es isósceles.

Clave C

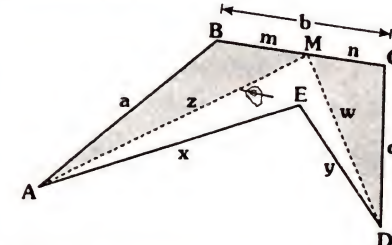
RESOLUCIÓN N° 136



- Nos piden la menor longitud de x.
- En $\triangle ADC$ por teorema de la correspondencia.
- Como:
 $m\angle DAC < m\angle ACD \Rightarrow x < 16 \dots (I)$
- Se traza \overline{DE} tal que $m\angle ADE = \alpha$
 $\Rightarrow \triangle ADE$ y $\triangle EDC$: isósceles
 $\Rightarrow AE = ED = x$
- En $\triangle ADE$, por existencia:
 $16 < x + x \Rightarrow 8 < x \dots (II)$
- De (I) y (II):
 $8 < x < 16$
 $\therefore x_{(\text{mínimo entero})} = 9$

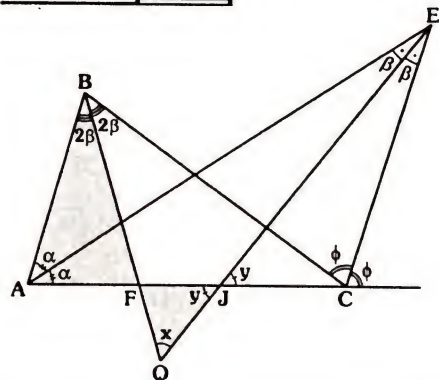
Clave C

RESOLUCIÓN N° 137



- Piden demostrar: $x + y < a + b + c$
- Por existencia en:
 $\triangle ABM$: $z < a + m \dots (I)$
 $\triangle MCD$: $w < c + n \dots (II)$
- En $\triangle AMDE$: $x + y < z + w \dots (III)$
- Sumando (I), (II) y (III)
 $x + y + z + w < a + c + \frac{m+n}{b} + z + w$
 $\therefore x + y < a + b + c$

RESOLUCIÓN N° 138



- Nos piden demostrar que el triángulo FQJ es isósceles
- En $\triangle ABC$, por ángulo entre bisectrices (teorema 27):

$$m\angle AEC = \frac{m\angle ABC}{2}$$

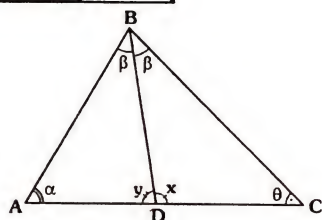
$$\Rightarrow m\angle AEJ = m\angle JEC = \beta$$

$$\Rightarrow m\angle ABF = m\angle FBC = 2\beta$$

- En $\triangle AEJ$: $y = \alpha + \beta$
- En la parte sombreada (⚡):
 $x + y = 2\alpha + 2\beta$
 $x + y = 2(\alpha + \beta) \Rightarrow x = y$

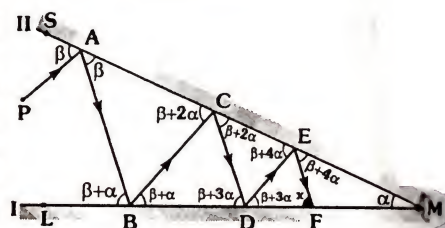
- Por lo tanto el triángulo FQJ es isósceles.

RESOLUCIÓN N° 139



- Piden demostrar: $x - y = \alpha - \theta$
- Por ángulo exterior:
 En $\triangle ABD$: $x = \alpha + \beta$
 En $\triangle BDC$: $y = \theta + \beta$
 $\Rightarrow x - y = (\alpha + \beta) - (\theta + \beta)$
 $\therefore x - y = \alpha - \theta$

RESOLUCIÓN N° 140



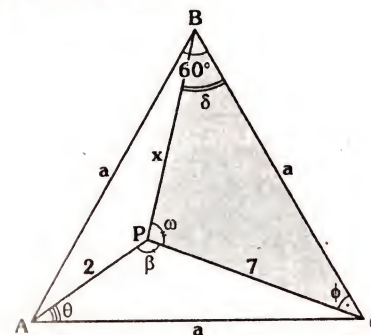
- Piden: x en función de β y α .
- De la condición (ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión):
 $m\angle SAP = m\angle BAC = \beta$
 $m\angle ABL = m\angle CBD = \beta + \alpha$
 $m\angle BCA = m\angle DCE = \beta + 2\alpha$
 $m\angle CDB = m\angle EDF = \beta + 3\alpha$
 $m\angle CED = m\angle FEM = \beta + 4\alpha$
- En $\triangle EFM$, por ángulo exterior:
 $x = \beta + 4\alpha + \alpha$
 $\therefore x = \beta + 5\alpha$

Clave **C**

Solucionario

Ciclo Semestral

RESOLUCIÓN N° 141



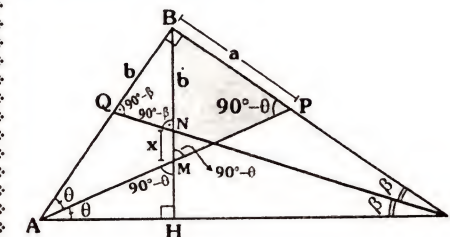
- Nos piden el mayor valor entero de x .
- En $\triangle APC$, por existencia:
 $7 - 2 < a < 7 + 2 \Rightarrow 5 < a < 9 \dots (I)$
- También $\theta < 60^\circ$ y $60^\circ < \beta \Rightarrow \theta < \beta$
- Por teorema de la correspondencia:
 como: $\beta > \theta \Rightarrow a > 7 \dots (II)$
- En $\triangle ABCP$, por teorema 41
 $a + a > 7 + 2 \Rightarrow a > 4,5 \dots (III)$
- De (I), (II) y (III):
 $7 < a < 9 \dots (IV)$
- Pero " a " no es entero (no es dato)
- En $\triangle BPC$: $\phi < 60^\circ$ y $60^\circ < \omega \Rightarrow \phi < \omega$
 Como: $\phi < \omega \Rightarrow x < a$
 Pero: $a < 9 \Rightarrow x < 9$
 $\therefore x_{(\text{mayor entero})} = 8$

Clave **C**

Nota

Para acotarlo inferiormente, se puede usar el teorema 41.

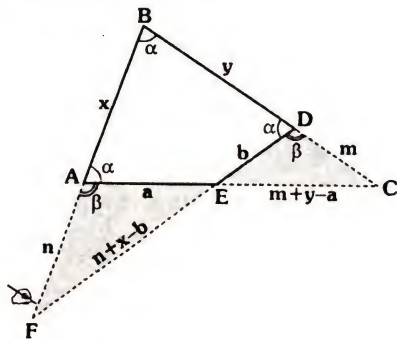
RESOLUCIÓN N° 142



- Piden: x en función de a y b .
- En $\triangle AHM$ y $\triangle NHM$:
 $m\angle AMH = 90^\circ - \theta$ y $m\angle HNC = 90^\circ - \beta$
- En $\triangle QBC$ y $\triangle ABP$:
 $m\angle BQC = 90^\circ - \beta$ y $m\angle APB = 90^\circ - \theta$
 $\Rightarrow \triangle QBN$ isósceles $\Rightarrow BQ = BN = b$
 $\triangle MBP$ isósceles $\Rightarrow MB = BP = a$
 $x + b = a$
 $\therefore x = a - b$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 143

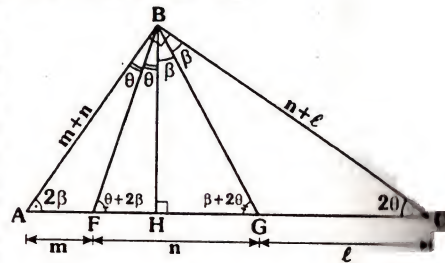


- Nos piden entre que valores está: xy
- $\triangle BDF$ y $\triangle ABC$: isósceles
 $\Rightarrow BC = AC$ y $BF = DF$
- En $\triangle FAE$ y $\triangle EDC$:
 Como $\alpha < 90^\circ \Rightarrow \beta > 90^\circ$, luego EF y EC son las longitudes de los mayores lados.
 - $n + x - b > n \Rightarrow x > b$... (I)
 - $m + y - a > m \Rightarrow y > a$... (II)
- De (I) y (II): $xy > ab$... (α)
- Por existencia de Δ_s :
 En $\triangle EAF$: $n + x - b < n + a$
 $\Rightarrow x < a + b$... (III)
 En $\triangle EDC$: $m + y - a < m + b$
 $\Rightarrow y < a + b$... (IV)
 - De (III) y (IV): $xy < (a + b)^2$... (β)
 - De (α) y (β):

$$ab < xy < (a + b)^2$$

Clave A

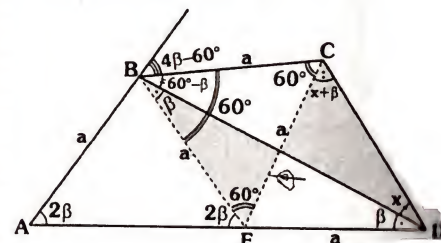
RESOLUCIÓN N° 144



- Nos piden la relación entre m, n, l
- Por teorema
 $m \angle BAC = m \angle HBC = 2\beta$
 $m \angle ACB = m \angle HBA = 2\theta$
 $\Rightarrow \triangle ABG$ y $\triangle FBC$: isósceles
 $AB = AG = m + n$
 $FC = CB = n + l$
- Por T. de pitágoras:
 $(m + n + l)^2 = (m + n)^2 + (n + l)^2$
 $\therefore 2ml = n^2$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 145



- Piden: x
- Como $m \angle BAD = 2(m \angle ADB) \Rightarrow$ traza mos \overline{BF} tal que $m \angle FBD = \beta \Rightarrow \triangle ABF$ y $\triangle FBD$ isósceles $\Rightarrow AB = BF = FD = a$

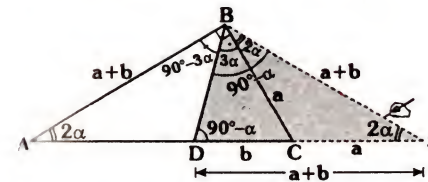
- Como $FB = BC$ es equilátero $\Rightarrow FC = a$
- Luego el $\triangle FCD$ es isósceles
- En la parte sombreada (∇):

$$x + x + \beta = 60^\circ + \beta$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 146



- Piden: $m \angle BAC$
- Como:
 $m \angle BAC = 2\alpha$ y $m \angle BDC = 90^\circ - \alpha$
- De acuerdo a los criterios sobre trazos auxiliares: se prolonga \overline{AC} y se traza \overline{BS} tal que: $m \angle BSA = 2\alpha \Rightarrow \triangle ABS$ y $\triangle DBS$ son isósceles
 $\Rightarrow AB = BS = DS = a + b$

- Como $CD = b \Rightarrow CS = a$
 $\Rightarrow \triangle BCS$ es isósceles
 $\Rightarrow m \angle CBS = m \angle BSC = 2\alpha$

- En $\triangle ABS$:

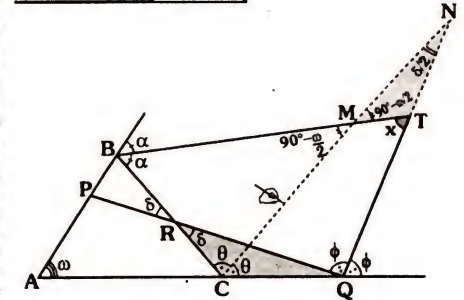
$$2\alpha + 2\alpha + 2\alpha + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\alpha = 30^\circ$$

$$\therefore m \angle BAC = 30^\circ$$

Clave B

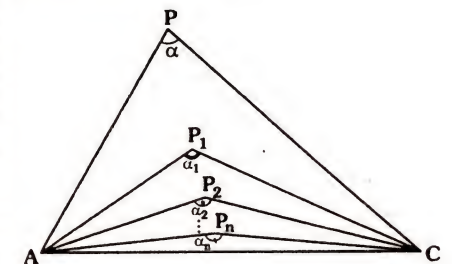
RESOLUCIÓN N° 147



- Piden: x
- Dato: $\omega - \delta = 20^\circ$
- Se traza \overline{CN} bisectriz del $\angle RCQ$, por ángulo entre bisectrices en los triángulos RCQ y ABC :
 $m \angle CNQ = \frac{\delta}{2}$
 $m \angle BMC = 90^\circ - \frac{\omega}{2}$
- En $\triangle MNT$:
 $x = 90^\circ - \frac{\omega}{2} + \frac{\delta}{2}$
 $\Rightarrow x = 90^\circ - \frac{(\omega - \delta)}{2}$
 $\therefore x = 80^\circ$

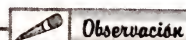
Clave C

RESOLUCIÓN N° 148



- Nos piden: α_n
- Usando el teorema 25:

- En $\triangle APC$: $\alpha_1 = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$
- En $\triangle AP_1C$: $\alpha_2 = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha_1$
 $\Rightarrow \alpha_2 = 90^\circ + \frac{1}{2}\left(90^\circ + \frac{1}{2}\alpha\right)$
- En $\triangle AP_2C$: $\alpha_3 = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha_2$
 $\Rightarrow \alpha_3 = 90^\circ + \frac{1}{2}\left[90^\circ + \frac{1}{2}\left(90^\circ + \frac{1}{2}\alpha\right)\right]$
- En $\triangle AP_{n-1}C$:
 $\alpha_n = 90^\circ + \frac{1}{2}\left\{90^\circ + \dots + \frac{1}{2}\left(90^\circ + \frac{1}{2}\alpha\right)\dots\right\}$
- Analizando por partes:
 $\alpha_n = 90^\circ + \frac{1}{2}90^\circ + \frac{1}{2^2}90^\circ + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}90^\circ + \frac{1}{2^n}\alpha$
- Hallemos E, así:
 $E = 90^\circ + \frac{1}{2}90^\circ + \frac{1}{2^2}90^\circ + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}90^\circ$
 $E = 90^\circ\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$



Observación

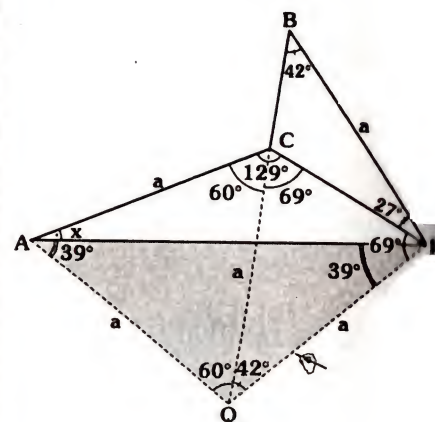
$$\frac{1-a^{k+1}}{1-a} = 1+a+a^2+\dots+a^k; k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow E = 90^\circ \left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} \right] \Rightarrow E = 180^\circ \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$$

$$\therefore \alpha_n = 180^\circ \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \right] + \frac{1}{2^n}\alpha$$

Clave D

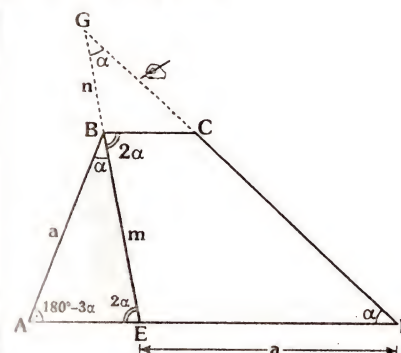
RESOLUCIÓN N° 149



- Piden: x
- Dato: $AC = BP$
- Se prolonga \overline{BC} (con ello se tendrá $m\angle PBC = 42^\circ$ y $m\angle PCQ = 69^\circ$, las medidas corresponden al tercer criterio de trazos auxiliares).
- Se traza \overline{PQ} tal que $m\angle PQB = 42^\circ$
 $\Rightarrow \triangle BPQ$ y $\triangle BCQ$ son isósceles
 $\Rightarrow PQ = QC = PB = a$
- Como $m\angle ACQ = 60^\circ$ y $AC = CQ \Rightarrow \triangle QCA$ es equilátero
 $AQ = QP = a \Rightarrow \triangle AQP$ es isósceles
 $\Rightarrow m\angle QAP = m\angle QPA = 39^\circ$
 $\Rightarrow x + 39^\circ = 60^\circ$
 $\therefore x = 21^\circ$

Clave B

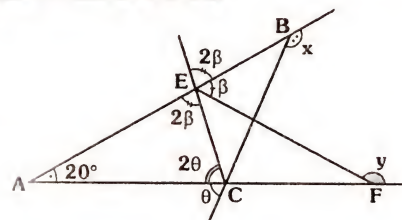
RESOLUCIÓN N° 150



- Nos piden el menor valor entero de α
- Las prolongaciones de \overline{EB} y \overline{DC} se cortan en G.
- Como $m\angle AEB = 2\alpha$ y $m\angle EDG = \alpha \Rightarrow m\angle EGD = \alpha$
 $\therefore \triangle EGD$ es isósceles $\Rightarrow m + n = a$
- Se puede asegurar: $a > m$
- En $\triangle ABE$, por teorema de la correspondencia:
 Como $a > m \Rightarrow 2\alpha > 180^\circ - 3\alpha$
 $\Rightarrow \alpha > 36^\circ$
 $\therefore \alpha_{\text{(menor entero)}} = 37^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 151



- Nos piden: $x + y$
- Por teorema 7:

$$\triangle ABC: x + \theta = 180^\circ + 20^\circ \dots (I)$$

$$\triangle AEF: y + \beta = 180^\circ + 20^\circ \dots (II)$$

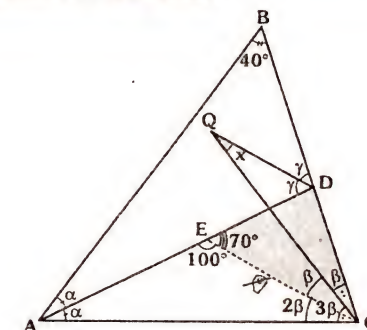
$$\begin{aligned} \text{De (I) y (II):} \\ x + y + \theta + \beta = 400^\circ \dots (III) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En } \triangle AEC: 2\theta + 2\beta + 20^\circ &= 180^\circ \\ \Rightarrow \theta + \beta &= 80^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En (III): } x + y + 80^\circ &= 400^\circ \\ \therefore x + y &= 320^\circ \end{aligned}$$

Clave A

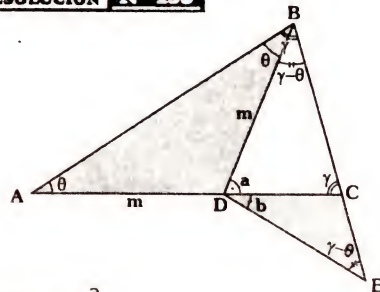
RESOLUCIÓN N° 152



- Piden: x
- Se traza \overline{CE} tal que $m\angle ECQ = \beta$
 $\Rightarrow m\angle ECA = 2\beta$, con ello se tendrá que \overline{CE} es bisectriz del ángulo ACB.
- Por ángulo entre bisectrices, en: $\triangle ABC$, por teorema 25:
 $m\angle AEC = 90^\circ + \frac{40^\circ}{2} = 110^\circ$
 $\Rightarrow m\angle CED = 70^\circ$
 $\triangle DEC$: por teorema 27:
 $x = \frac{70^\circ}{2}$
 $\therefore x = 35^\circ$

Clave D

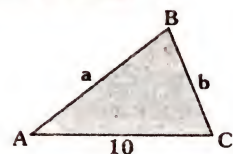
RESOLUCIÓN N° 153



- Piden: $\frac{a}{b}$
- Dato: $AD = DB = DE$
 $\Rightarrow \triangle ABD$ y $\triangle DCE$ son isósceles
- Por ángulo exterior, en:
 $\triangle ABD: a = \theta + \theta \Rightarrow a = 2\theta$
 $\triangle DCE: b + \gamma - \theta = \gamma \Rightarrow b = \theta$
 $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2\theta}{\theta}$
 $\therefore \frac{a}{b} = 2$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 154

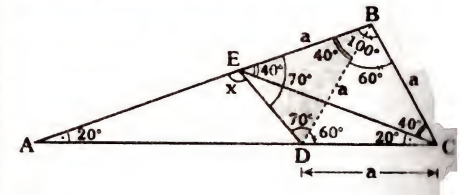


- Piden el menor valor entero del perímetro:
 $\text{Perim}_{\triangle ABC} = 10 + a + b$
- Por existencia:
 $a + b > 10$
 $\Rightarrow \frac{a+b+10}{\text{perim}_{\triangle ABC}} > \frac{10}{10+10}$
 $\Rightarrow \text{Perim}_{\triangle ABC} > 20$

- Por lo tanto el menor valor entero de perímetro es 21.

Clave E

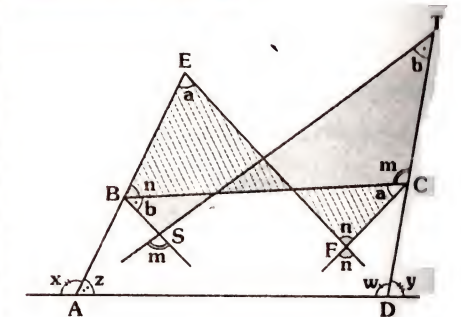
RESOLUCIÓN N° 155



- Piden: x
- $\triangle AEC$: isósceles $\Rightarrow m\angle EAC = m\angle ECA = 20^\circ$
- $\triangle EBC$: isósceles $\Rightarrow EB = BC = a$
- Se tiene:
 $BC = CD = a$ y $m\angle BCD = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle DBC$ equilátero
 $\Rightarrow DB = a \Rightarrow \triangle EBD$ isósceles
- Luego: $m\angle BED = m\angle EDB = 70^\circ$
 $\therefore x = 110^\circ$

Clave I

RESOLUCIÓN N° 156

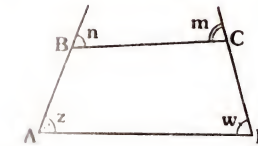


- Piden: $m + n$
- Dato: $x + y = 220^\circ$

- En $\triangle BSTC$ y $\triangle BECF$, por teorema 5, se tendrá:

$$m\angle EBC = n \text{ y } m\angle = m$$

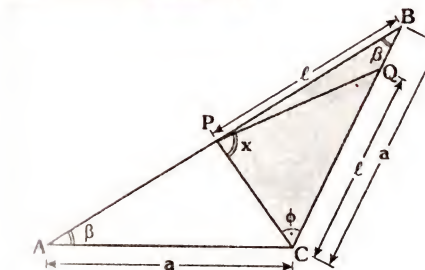
- Como: $x + y = 220^\circ \Rightarrow z + w = 140^\circ$



Del gráfico:
 $m + n = z + w$
 $\therefore m + n = 140^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 157

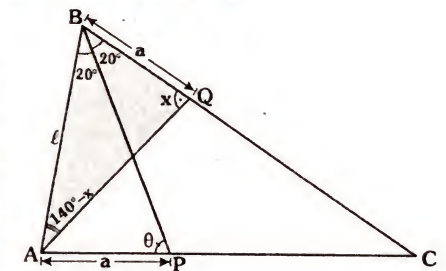


- Nos pide el menor valor entero de x
- Como $CQ = PB \Rightarrow a > \ell$
- En $\triangle PCB$, por teorema de la correspondencia:
 $x > \phi \dots (I)$
- En $\triangle APC$: $x > \beta \dots (II)$
- Sumando (I) y (II):
 $2x > \beta + \phi$
 $\Rightarrow x + 2x > \beta + \phi + x$
 $\Rightarrow x > 60^\circ$

$$\therefore x_{(\text{menor entero})} = 61^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 158



- Piden el menor valor entero de x
- En $\triangle PBC$: $\theta > 20^\circ$
- En $\triangle ABP$: como $\theta > 20^\circ \Rightarrow \ell > a$
- En $\triangle ABQ$:

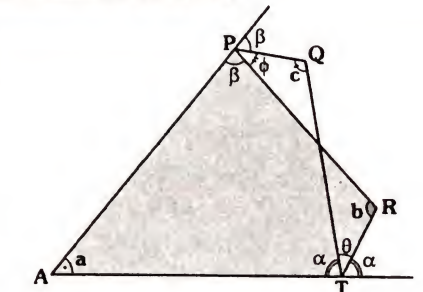
$$\ell > a \Rightarrow x > 140^\circ - x$$

$$\Rightarrow x > 70^\circ$$

$$\therefore x_{(\text{menor entero})} = 71^\circ$$

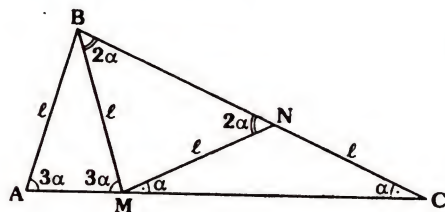
Clave B

RESOLUCIÓN N° 159



- Piden: $m + n + p$
- Dato: $ma + nb + pc = 360^\circ$
- En $\triangle APRT$ y $\triangle APQT$, por teorema 8:
 $a + b = \alpha + \beta + \phi$
 $a + c = \alpha + \theta + \beta$

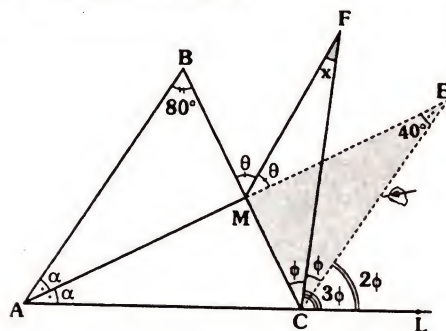
RESOLUCIÓN N° 165



- Piden: $m\angle BAC$
- Dato: α es máximo entero.
 $\triangle ABM$, $\triangle BNM$ y $\triangle MNC$ son isósceles.
- En $\triangle ABM$, del teorema 17:
 $3\alpha < 90^\circ \Rightarrow \alpha < 30^\circ$
- Como " α " es máximo y entero
 $\Rightarrow \alpha = 29^\circ$.
- Luego: $m\angle BAC = 3\alpha$
 $\therefore m\angle BAC = 87^\circ$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 166



- Piden: x
- Prolongamos \overline{AM} y trazamos \overline{CE} tal que $m\angle FCE = \phi \Rightarrow m\angle ECL = 2\phi$

170

- Por ángulo entre bisectrices (teorema 27) en:

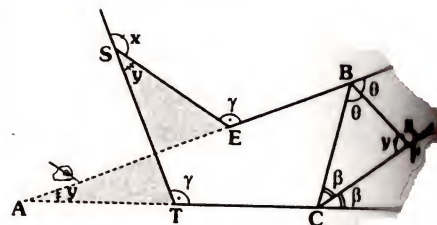
$$\triangle ABC: m\angle AEC = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

$$\triangle MEC: x = \frac{40^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 20^\circ$$

Clave

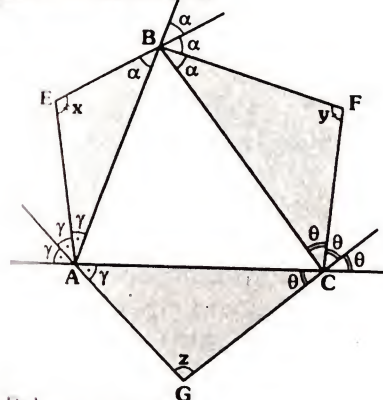
RESOLUCIÓN N° 167



- Piden: x
- Se tiene: $x + y = 180^\circ$
 $\Rightarrow m\angle BFC = m\angle EST = y$
- En la parte sombreada: $m\angle EAT = y$
- En $\triangle ABC$ por teorema 26 (ángulo entre bisectrices)
 $y = 90^\circ - \frac{y}{2} \Rightarrow y = 60^\circ$
- En (I):
 $x + 60^\circ = 180^\circ$
 $\therefore x = 120^\circ$

Clave

RESOLUCIÓN N° 168



- Piden: $x + y + z$

En $\triangle AEB$, $\triangle BFC$ y $\triangle ACG$:

$$x + \alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$y + \theta + \alpha = 180^\circ$$

$$z + \theta + \gamma = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x + y + z + 2(\theta + \gamma + \alpha) = 540^\circ \quad \dots (I)$$

En $\triangle ABC$, por teorema 3:

$$3\gamma + 3\theta + 3\alpha = 360^\circ \Rightarrow \gamma + \theta + \alpha = 120^\circ$$

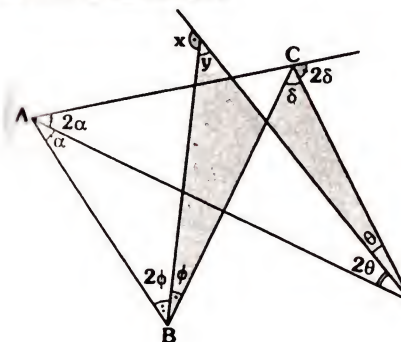
En (I):

$$x + y + z + 2(120^\circ) = 540^\circ$$

$$\therefore x + y + z = 300^\circ$$

Clave A

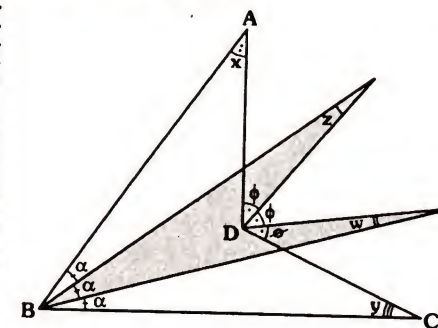
RESOLUCIÓN N° 169



- No piden: x
- Dato: $\theta + \alpha = 25^\circ$
- Del gráfico: $x - y = 180^\circ$
- En $\triangle ABC$, por ángulo exterior:
 $3\delta = 3\alpha + 3\phi \Rightarrow \delta = \alpha + \phi \quad \dots (I)$
- En la parte sombreada (∇):
 $y + \phi = \delta + \theta$
- De (I): $y + \phi = \alpha + \phi + \theta$
 $\Rightarrow y = \alpha + \theta \Rightarrow y = 25^\circ$
 $\therefore x = 155^\circ$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 170

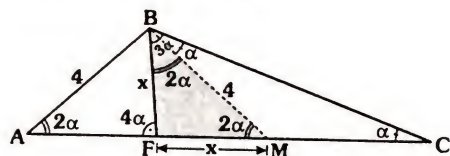


- Piden: $\frac{x + y}{z + w}$
- En la parte sombreada:
 $z + w + \alpha = \phi \Rightarrow z + w = \phi - \alpha$
- En $\triangle ABCD$: $x + y + 3\alpha = 3\phi$
 $\Rightarrow x + y = 3(\phi - \alpha)$
 $\Rightarrow \frac{x + y}{z + w} = \frac{3(\phi - \alpha)}{\phi - \alpha}$
 $\therefore \frac{x + y}{z + w} = 3$

Clave B

171

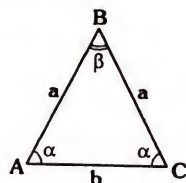
RESOLUCIÓN N° 171



- Piden el valor entero de x .
- En $\triangle ABF$:
 $m\angle BAF < m\angle AFB \Rightarrow x < 4 \quad \dots (I)$
- Se traza \overline{BM} tal que $m\angle MBC = \alpha$
 $\Rightarrow \triangle MBC$, $\triangle FBM$ y $\triangle ABM$ isósceles
 $\Rightarrow BM = 4$ y $FM = x$
- En $\triangle FBM$:
 $4 < x + x \Rightarrow 2 < x \quad \dots (II)$
- De (I) y (II): $2 < x < 4$
- Por lo tanto el valor entero de x es **3**.

Clave C

RESOLUCIÓN N° 172

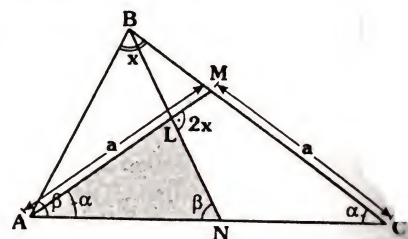


- Nos piden la medida del mayor valor entero del menor ángulo interior.
- Dato: $\text{Perim}(\triangle ABC) > 3b$
- Averiguemos ahora quien es el menor ángulo interior.
- Del dato: $2a + b > 3b \Rightarrow a > b$

- Por teorema de la correspondencia
 $\alpha > \beta$
- Es decir nos piden β , tal que sea mayor entero.
- Como: $\alpha > \beta \Rightarrow 2\alpha > 2\beta$
 $\Rightarrow \frac{2\alpha + \beta}{180^\circ} > \frac{2\beta + \beta}{180^\circ}$
 $\Rightarrow 60^\circ > \beta$
- Por lo tanto la medida del mayor valor entero de β es **59°**.

Clave D

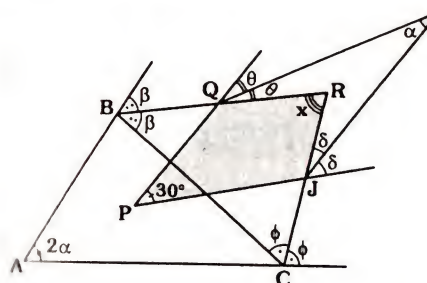
RESOLUCIÓN N° 173



- Nos piden: x
- Dato: $AB = BN$ y $AM = MC$
 $\triangle ABM$ y $\triangle AMC$ isósceles
 $\Rightarrow m\angle BAN = m\angle ANB = \beta$
 $m\angle MAC = m\angle ACM = \alpha$
- En $\triangle ABC$:
 $x + \alpha + \beta = 180^\circ \quad \dots (I)$
- En $\triangle ALN$: $\alpha + \beta = 2x$
- En (I): $x + 2x = 180^\circ$
 $\therefore x = 60^\circ$

Clave A

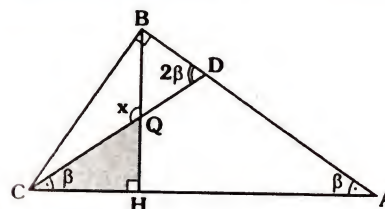
RESOLUCIÓN N° 174



- En $\triangle ABC$, por ángulo entre bisectrices (teorema 26):
 $x = 90^\circ - \frac{(2\alpha)}{2} \Rightarrow x + \alpha = 90^\circ \quad \dots (I)$
- En la región sombreada, por teorema 31:
 $\alpha = \frac{x - 30^\circ}{2} \quad \dots (II)$
 $x + \frac{x - 30^\circ}{2} = 90^\circ$
 $\therefore x = 70^\circ$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 175

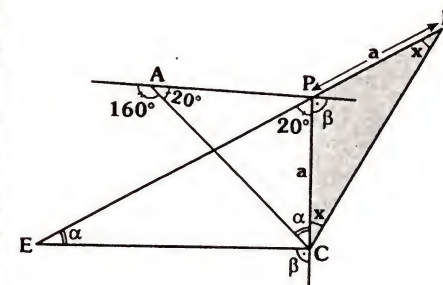


- Nos piden el mayor valor entero de x .
- Por dato: $AD = CD$
 $\Rightarrow \triangle CDA$ isósceles
 $\Rightarrow m\angle DCA = m\angle DAC = \beta$

- En $\triangle DBC$: $2\beta < 90^\circ \Rightarrow \beta < 45^\circ \quad \dots (I)$
- En $\triangle CHQ$: $x = 90^\circ + \beta$
- De (I): $\beta < 45^\circ \Rightarrow \underbrace{90^\circ + \beta}_x < 45^\circ + 90^\circ$
 $\Rightarrow x < 135^\circ$
- Por lo tanto el mayor valor entero de x es **134°**.

Clave D

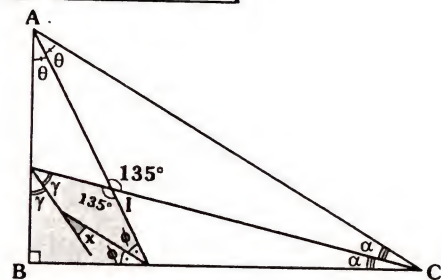
RESOLUCIÓN N° 176



- Piden: x
- Por dato:
 $PB = PC \Rightarrow m\angle PCB = x$
- En $\triangle PAC$: $\beta = \alpha + 20^\circ$
- En $\triangle EPC$: $m\angle CPE + \alpha = \beta$
 $\Rightarrow m\angle CPE = 20^\circ$
- En $\triangle CBP$: $x + x = 20^\circ$
 $\therefore x = 10^\circ$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 177



- Piden: x
- En $\triangle ABC$, por ángulo entre bisectrices (teorema 25)

$$m\angle AIC = 90^\circ + \frac{90^\circ}{2} = 135^\circ$$

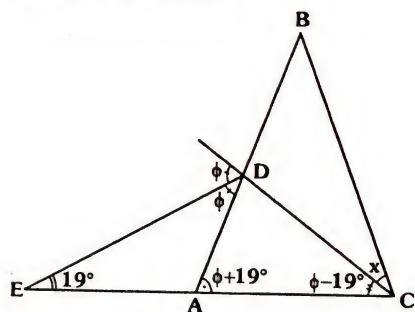
- En la región sombreada, por teorema 32.

$$x = \frac{135^\circ - 90^\circ}{2}$$

$$\therefore x = \frac{45^\circ}{2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 178



- Piden: x
- Dato: $AB = BC$
- Por ángulo exterior en:
 $\triangle EDA: m\angle DAC = \phi + 19^\circ$
 $\triangle EDC: m\angle DCE = \phi - 19^\circ$

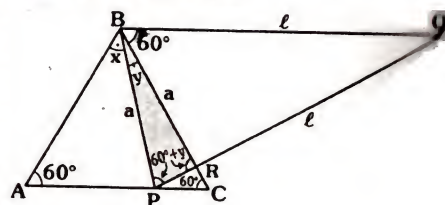
- Como $AB = BC \Rightarrow m\angle ACB = m\angle BAC$

$$x + \phi - 19^\circ = \phi + 19^\circ$$

$$\therefore x = 38^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 179



- Piden: x
- Dato: $PB = BR; BQ = PC$ y $\overline{BQ} \parallel \overline{PC}$
 $\triangle ABC$: equilátero $\Rightarrow x + y = 60^\circ$
- Por ángulos alternos: $m\angle CBQ = 60^\circ$
 $\triangle PBQ$ y $\triangle PBR$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle QBP = m\angle BPQ = m\angle PRB = 60^\circ + y$
- En $\triangle PBR$:

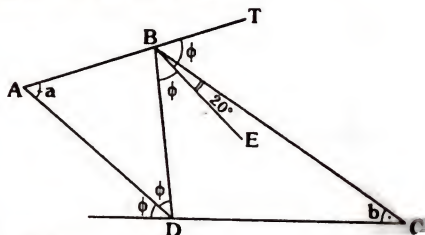
$$60^\circ + y + 60^\circ + y + y = 180^\circ$$

$$\Rightarrow y = 20^\circ$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

Clave M

RESOLUCIÓN N° 180



- Piden: $a - b$
- Dato: $\overline{BE} \parallel \overline{AD}$ y $m\angle EBI = m\angle EBD$

- Por ángulos alternos internos:

$$m\angle EBD = \phi$$

- Por ángulos correspondientes:

$$a = \phi$$

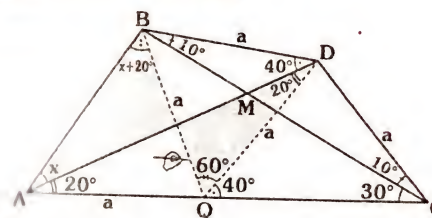
- En $\triangle DBC$, por ángulo exterior

$$2a = a + 20^\circ + b$$

$$\therefore a - b = 20$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 181



- Piden: x
- Como $m\angle DCA = 2(m\angle DAC)$ se traza \overline{DQ} tal que $m\angle ADQ = 20^\circ \Rightarrow \triangle ADQ$ y $\triangle QDC$ son isósceles:
 $\Rightarrow AQ = QD = DC = a$

- Se tiene entonces: $m\angle QDB = 60^\circ$ y

$$DQ = DB \Rightarrow \triangle DQB \text{ es equilátero}$$

- $\Rightarrow QB = QA \Rightarrow m\angle QAB = m\angle ABQ = x + 20^\circ$

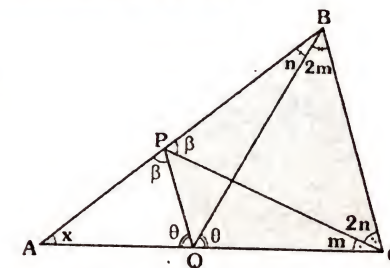
- En la parte sombreada (\triangle):

$$x + x + 20^\circ = 60^\circ + 20^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave C

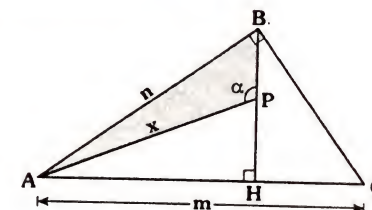
RESOLUCIÓN N° 182



- Piden: x
- En $\triangle ABC$:
 $x + 3(m + n) = 180^\circ \dots (a)$
- En $\triangle CQP$, por teorema 8:
 $\beta + \theta = 3(m + n) \dots (I)$
- En $\triangle QBC$ y $\triangle PBC$:
 $\theta + 3m + 2n = 180^\circ$
 $\beta + 2m + 3n = 180^\circ$
 $\Rightarrow \theta + \beta + 5(m + n) = 360^\circ$
 $\frac{3(m + n)}{3(m + n)}$
 $\Rightarrow m + n = 45^\circ$
- En (a): $x + 3(45^\circ) = 180^\circ$
 $\therefore x = 45^\circ$

Clave C

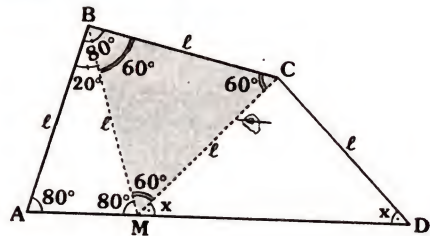
RESOLUCIÓN N° 183



- Piden el mayor valor entero de x
- Dato: $m + n = 10$
- En $\triangle AHP$: $\alpha > 90^\circ \Rightarrow n > x$... (I)
- En $\triangle ABC$: $n < m \Rightarrow 2n < \frac{n+m}{10}$
 $\Rightarrow n < 5$... (II)
- De (I) y (II): $x < n$ y $n < 5$
 $\Rightarrow x < 5$
- El mayor valor entero de x es 4

Clave A

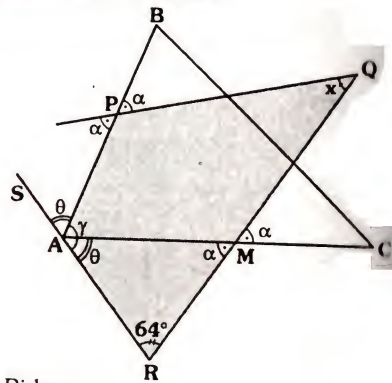
RESOLUCIÓN N° 184



- Piden: x
- Datos: $AB = BC = CD$
- Se traza \overline{BM} tal que $m\angle ABM = 20^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ABM$: isósceles $\Rightarrow MB = \ell$
- Como $MB = BC$ y $m\angle MBC = 60^\circ$, al trazar \overline{MC} se tendrá que el $\triangle MBC$ es equilátero
- $\triangle MCD$ es isósceles $\Rightarrow m\angle CMD = x$
 $\Rightarrow x + 140^\circ = 180^\circ$
 $\therefore x = 40^\circ$

Clave E

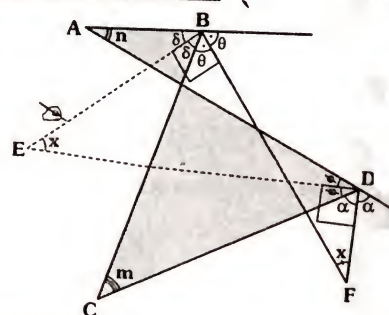
RESOLUCIÓN N° 185



- Piden: x
- Dato: $\theta + \gamma = 180^\circ$
- Al prolongar \overline{RA} , se tendrá:
 $m\angle BAS = \theta$
- En $\triangle AMR$: $\alpha + \theta + 64^\circ = 180^\circ$
 $\Rightarrow \alpha + \theta = 116^\circ$
- En $\triangle QRP$, por teorema 8:
 $x + 64^\circ = \frac{\alpha + \theta}{116^\circ}$
 $\therefore x = 52^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 186



- Piden: x
- Dato: $m + n = 60^\circ$

- Se trazan las bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ADC$.

$$\Rightarrow m\angle EBF = m\angle EDF = 90^\circ$$

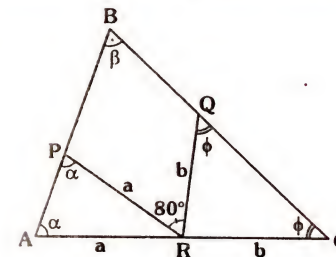
$$\Rightarrow m\angle BED = x$$

Por teorema 28: $x = \frac{m+n}{2}$
 $\therefore x = 30^\circ$

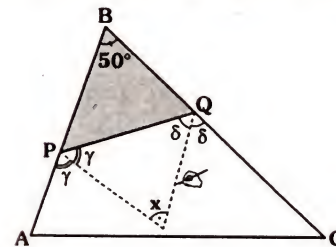
Clave B

RESOLUCIÓN N° 187

- Analicemos este problema por partes:



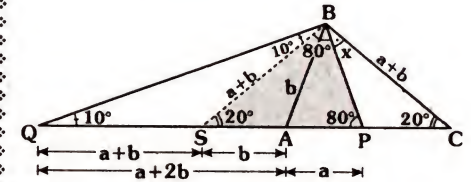
- $\triangle ABC$: $\alpha + \phi + \beta = 180^\circ$... (I)
- En $\triangle RPBQ$: $\alpha + \phi = \beta + 80^\circ$
- En (I): $\beta + 80^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 50^\circ$



- Piden: x
- Por ángulo entre bisectrices:
 $x = 90^\circ - \frac{50^\circ}{2}$
 $\therefore x = 65^\circ$

Clave D

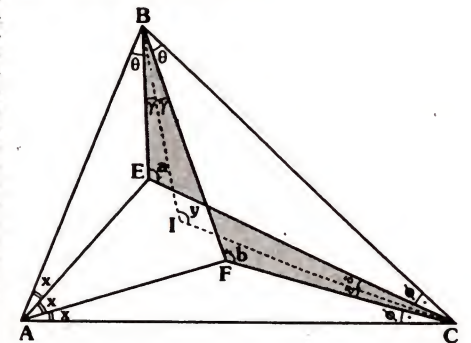
RESOLUCIÓN N° 188



- Piden: x
- Se traza \overline{BS} tal que $m\angle QBS = 10^\circ$
 $\Rightarrow \triangle QSB$ y $\triangle SBS$: isósceles
 $\Rightarrow QS = SB = BC = a + b$
- Como:
 $QA = a + 2b \Rightarrow SA = b \Rightarrow SP = a + b$
 $\Rightarrow \triangle SPB$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle SBP = m\angle SPB = 80^\circ$
- En $\triangle BPC$: $x + 20^\circ = 80^\circ$
 $\therefore x = 60^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 189



- Piden: x
- Dato: $a + b = 210^\circ$

- Se trazan las bisectrices de los ángulos EBF y FCE, las cuales también son bisectrices de los ángulos ABC y ACB.

- Por teorema 28:

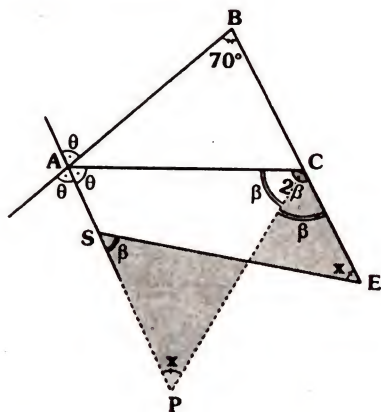
$$y = \frac{a+b}{2} \Rightarrow y = 105^\circ$$

- Por teorema 25:

$$y = 90^\circ + \frac{3x}{2} \Rightarrow x = 10^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 190



- Piden: x
- Se traza la bisectriz del $\angle ACE$, la cual corta a la prolongación de AS en P .
- En la parte sombreada:

$$m\angle SPC = x$$

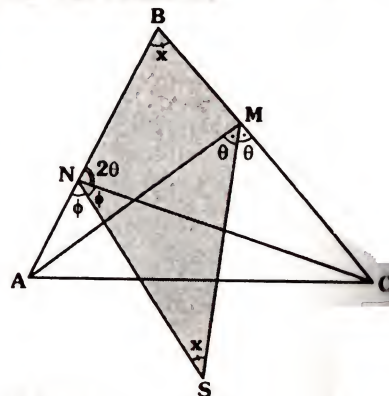
- En $\triangle ABC$, por ángulo entre bisectrices (teorema 26)

$$x = 90^\circ - \frac{70^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 55^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 191



- Piden: x

- Dato: $m\angle BNC = m\angle AMC$

- $m\angle BNC + m\angle CNA = 180^\circ$

$$\Rightarrow 2\theta + 2\phi = 180^\circ \Rightarrow \theta + \phi = 90^\circ$$

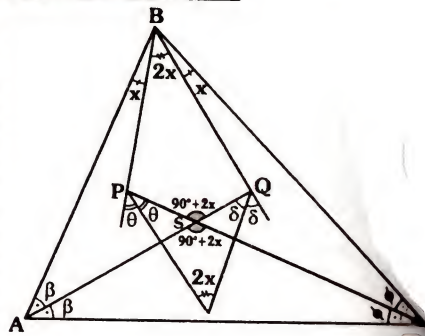
- En la región sombreada:

$$x + x = \underbrace{\theta + \phi}_{90^\circ}$$

$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave

RESOLUCIÓN N° 192



- Piden: x

- En $\triangle ABC$, por teorema 25:

$$m\angle ASC = 90^\circ + \frac{(m\angle ABC)}{2}$$

$$\Rightarrow m\angle ASC = 90^\circ + 2x$$

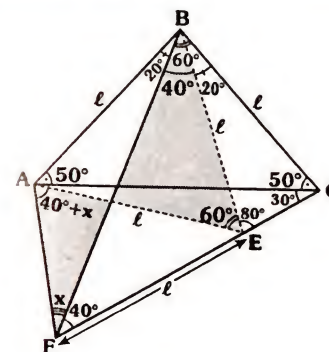
- En $\triangle PBSQ$, por teorema 31:

$$2x = \frac{(90^\circ + 2x) - 2x}{2}$$

$$\therefore x = \frac{45^\circ}{2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 193



- Nos piden: x

Al completar "ángulos" nos damos cuenta:

$$m\angle ACB = 2(m\angle BAC)$$

Se traza \overline{BE} , tal que $m\angle CBE = 20^\circ$

$\Rightarrow \triangle EBC$ y $\Rightarrow \triangle FEB$: isósceles

$$\Rightarrow AE = EB = BC = \ell$$

Como $AB = BE$ y $m\angle ABE = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle BEA$ equilátero $\Rightarrow AE = \ell$

$\triangle AEF$: isósceles $\Rightarrow m\angle EAF = 40^\circ + x$

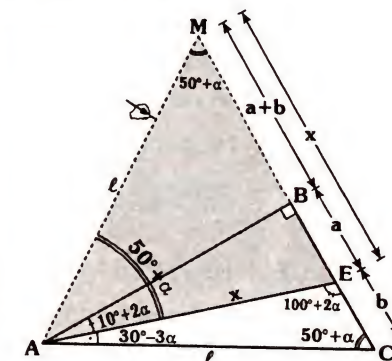
- En la parte sombreada:

$$x + 40^\circ + x = 60^\circ + 40^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 194



- Nos piden: x

- Completando ángulos, se tendrá:

$$m\angle AEC = 2(m\angle ACE)$$

- Se prolonga \overline{CB} y se traza \overline{AM} tal que:

$$m\angle AME = 50^\circ + \alpha$$

$$\Rightarrow m\angle EAM = 50^\circ + \alpha$$

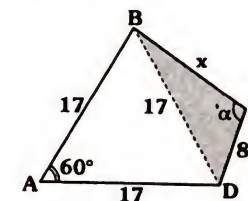
$\Rightarrow \triangle AMC$ y $\triangle AEM$ isósceles

$\Rightarrow MB = BC = a + b$ y $AE = EM$

$$\therefore x = 2a + b$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 195



- Piden la cantidad de valores enteros de x .
- Dato: $\alpha > 90^\circ$
- Como $AB=AD$ y $m\angle BAD=60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle BDA$ es equilátero $\Rightarrow BD=17$

- En $\triangle BCD$ por existencia:
 $17 - 8 < x < 17 + 8$
 $9 < x < 25$... (I)

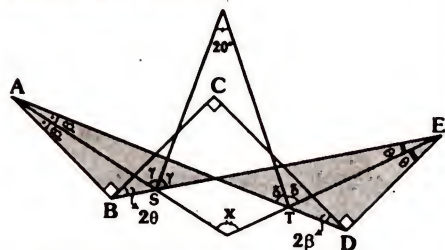
- Por teorema 21, como $\alpha > 90^\circ$

$$17^2 > x^2 + 8^2$$

$$\Rightarrow 15 > x \quad \dots (II)$$

- De (I) y (II): $9 < x < 15$
- Los valores enteros de x , son:
{10;11;12;13;14}


Clave B

RESOLUCIÓN N° 196

- Nos piden: x
- Del gráfico: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$
 $\Rightarrow m\angle CDA = 2\beta$ y $m\angle CBE = 2\theta$
- Por teorema 28:
 - En la parte sombreada:

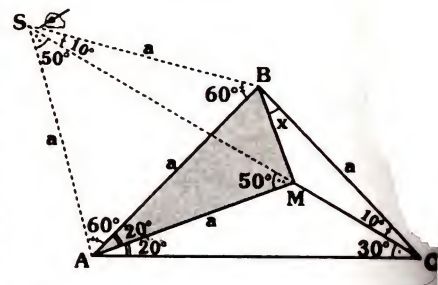
$$x = \frac{(90^\circ + 2\theta) + (90^\circ + 2\beta)}{2}$$
$$\Rightarrow x = 90^\circ + \theta + \beta$$

... (I)

- En  ASET: $20^\circ = \frac{\theta + \beta}{2} \Rightarrow \theta + \beta = 40^\circ$

- En (I): $x = 90^\circ + 40^\circ$
 $\therefore x = 130^\circ$

Clave

RESOLUCIÓN N° 197

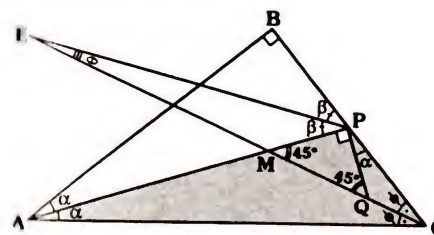
- Piden: x
- Se prolonga \overline{CM} y se traza \overline{BS} tal que
 $m\angle BSC = 10^\circ \Rightarrow BS = a$
- Como $SB = BA$ y $m\angle SBA = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle BSA$ es equilátero $\Rightarrow AS = a$ y
 $m\angle ASM = 50^\circ$
- $\triangle SAM$: isósceles $\Rightarrow AM = a$
- Como $AB = AM \Rightarrow \triangle ABM$ es isósceles
 $\Rightarrow m\angle AMB = m\angle ABM = 80^\circ$
 $\Rightarrow m\angle BMS = 30^\circ$

- En $\triangle BCM$:

$$x + 10^\circ = 30^\circ$$

$$\therefore x = 20^\circ$$

Clave

RESOLUCIÓN N° 198

- Piden: $\frac{\alpha}{\theta}$
- Dato: $MP = PQ$
- En $\triangle ABP$, por ángulo exterior:

$$m\angle APQ + \alpha = 90^\circ + \alpha$$

$$\Rightarrow m\angle APQ = 90^\circ$$

$\triangle MPQ$: isósceles

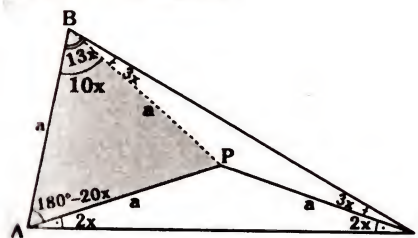
$$\Rightarrow m\angle PMQ = m\angle MQP = 45^\circ$$

- $$\begin{aligned} \bullet \text{ Sea } m \angle \text{ACM} = \phi &\Rightarrow \alpha + \phi = 45^\circ \\ &\Rightarrow m \angle \text{QCP} = \phi \end{aligned}$$

- En $\triangle APC$, por ángulo entre bisectrices (teorema 27):

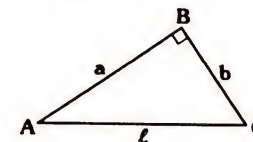
$$\theta = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{\theta} = 2$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 199

- Piden: $m\angle PAC$
- Como $AB=AP$ y $m\angle BAP = 180^\circ - 20x$
 $\Rightarrow m\angle ABP = m\angle APB = 10x$
 $\Rightarrow m\angle PBC = 3x \Rightarrow \triangle PBC$
es isósceles $\Rightarrow PB = PC = a$
- $\triangle ABP$: equilátero $\Rightarrow 10x = 60^\circ$
 $\Rightarrow x = 6^\circ$
 $\therefore m\angle PAC = 12^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 200

- Piden la cantidad de valores enteros de ℓ .
- Dato: $a + b + \ell = 30$
- En $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned}\ell &> a \\ \ell &> b \\ \Rightarrow 2\ell &> a + b \\ \ell + 2\ell &> \underbrace{a + b + \ell}_{30} \Rightarrow \ell > 10\end{aligned}$$

- Por existencia:

$$\ell < a + b$$

$$\Rightarrow \ell + \ell < \underbrace{a + b + \ell}_{30} \Rightarrow \ell < 15$$
- Se tendrá entonces:

$$10 < \ell < 15 \quad \dots (I)$$
- Aún no podemos indicar la cantidad de valores, falta la restricción para que sea triángulo rectángulo:

$$a^2 + b^2 = \ell^2$$

Considerando:

- Sean: $x, y \in \mathbb{R}^+$, se cumple:
M.C. \geq M.A.
- M.C.: media cuadrática
- M.A.: media aritmética

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2}$$

- Usando la observación para a y b :

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{\ell^2}{2}} \geq \frac{(30 - \ell)}{2}$$

- Resolviendo: $\ell \geq 30(\sqrt{2} - 1)$

$$\ell \geq 12,426 \quad \dots (I)$$

- De (I) y (II):

$$12,426 \leq \ell < 15$$

- Los valores entero de ℓ son: $\{13; 14\}$

Clave

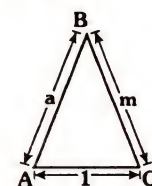
Nota:
 a y b no son enteros necesariamente, la condición: $a, b \in \mathbb{R}^+$.



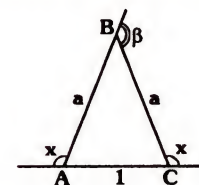
Solucionario

Ciclo Semestral Intensivo

RESOLUCIÓN N° 201



- Nos piden la medida del menor ángulo exterior.
- Dato: $a, m \in \mathbb{Z}^+$ y β es la medida del mayor ángulo exterior.
- Analicemos:
Por existencia $|a - m| < 1 < a + m$
Como a y m son enteros $\Rightarrow a = m$
 $\Rightarrow m \angle BAC = m \angle ACB$
- Por dato existen medidas angulares mayor y menor $\Rightarrow a > 1$
 $\Rightarrow m \angle BCA > m \angle ABC$
- \Rightarrow El mayor ángulo exterior es en "B".

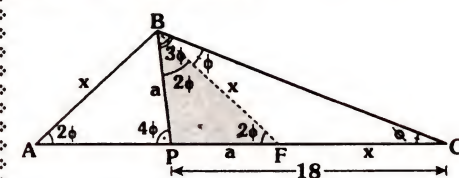


$$x + x + \beta = 360^\circ$$

$$\therefore x = 180^\circ - \frac{\beta}{2}$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 202



- Nos piden la cantidad de valores enteros de x .
- Se traza \overline{BF} , tal que $m \angle FBC = \phi$
 $\Rightarrow \triangle FBC, \triangle PBF$ y $\triangle ABF$: isósceles
 $\Rightarrow AB = BF = FC = x$ y $PB = PF = a$
- Del gráfico: $a + x = 18$
- En $\triangle ABP$: como $m \angle APB > m \angle BAP$
 $\Rightarrow x > a$
 $\Rightarrow 2x > \frac{x+a}{18}$
 $x > 9 \quad \dots (I)$

- En $\triangle BFP$, por existencia:

$$x < 2a$$

$$\frac{x}{2} < a$$

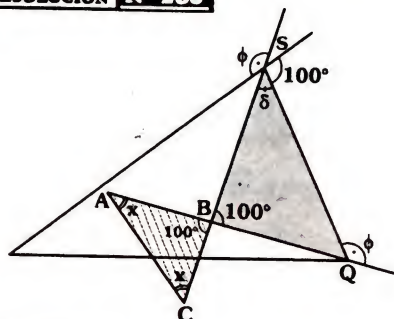
$$\Rightarrow x + \frac{x}{2} < \frac{a+x}{18}$$

$$\Rightarrow x < 12 \quad \dots (II)$$

- De (I) y (II): $9 < x < 12$
- Los valores enteros de x , son: $\{10; 11\}$

Clave **B**

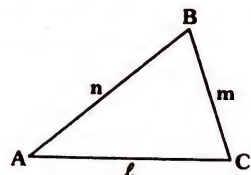
RESOLUCIÓN N° 203



- Piden: x
- Dato: $\triangle ABC$: isósceles
- Sea $m\angle BSQ \Rightarrow m\angle SBQ + \delta = \phi$
 $\Rightarrow m\angle SBQ = 100^\circ$
- Como $\triangle ABC$ es isósceles y
 $m\angle ABC = 100^\circ$
 $\Rightarrow m\angle BAC = m\angle BCA = x$
 $\Rightarrow x + x + 100^\circ = 180^\circ$
 $\therefore x = 40^\circ$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 204



- Nos piden la cantidad de triángulos de longitudes enteras y perímetro 40.
 $\Rightarrow m, n \text{ y } l \in \mathbb{Z}^+$
- Sea p el semiperímetro de $\triangle ABC \Rightarrow p = 20$, por teorema de existencia:
 $m < 20$; $n < 20$ y $l < 20$

- Sin pérdida de generalidad, consideremos:

$$m \geq n \geq l \quad \dots (I)$$

- Como m, n, l son enteros, analicemos de la siguiente forma:

- Para $m = 19 \Rightarrow n + l = 21$

n	l
19	2
18	3
17	4
16	5
15	6
14	7
13	8
12	9
11	10

Si consideramos $n = 10 \Rightarrow l = 11$, ya no cumpliría (I), además el Δ ya se habría contado, se trataría del Δ de lados $\{19; 11; 10\}$

- Cuando $m = 19 \Rightarrow$ tenemos 9 triángulos.

- Para $m = 18 \Rightarrow n + l = 22$

n	l
18	4
17	5
16	6
15	7
14	8
13	9
12	10
11	11

\Rightarrow se tienen 8 triángulos

- Para $m = 17 \Rightarrow n + l = 23$

n	l
17	6
16	7
15	8
14	9
13	10
12	11

\Rightarrow se tienen 6 triángulos

- Para $m = 16 \Rightarrow n + l = 24$

n	l
16	8
15	9
14	10
13	11
12	12

\Rightarrow se tienen 5 triángulos

- Para $m = 15 \Rightarrow n + l = 25$

n	l
15	10
14	11
13	12

\Rightarrow se tienen 3 triángulos

- Para $m = 14 \Rightarrow n + l = 26$

n	l
14	12
13	13

\Rightarrow se tienen 2 triángulos

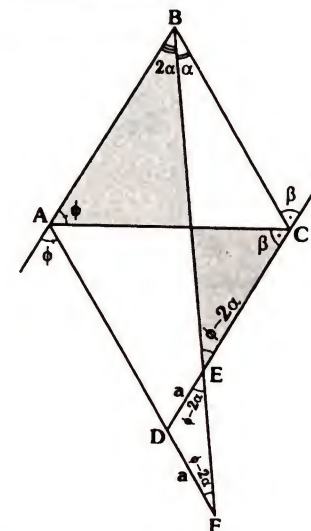
- Luego:

El total de triángulos es: $9 + 8 + 6 + 5 + 3 + 2$

Por lo tanto, el total de triángulos es 33

Clave **C**

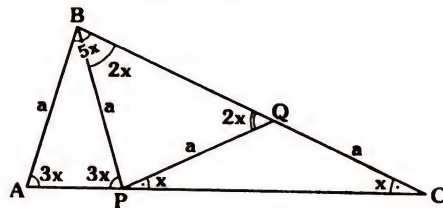
RESOLUCIÓN N° 205



- Piden el mayor valor entero de α
- Analicemos las restricciones para α
- En $\triangle ABC$: $3\alpha < 180^\circ \Rightarrow \alpha < 60^\circ \dots (I)$
- En $\triangle EBC$: $\beta = \phi - \alpha$
- En la parte sombreada:
 $\phi + 2\alpha = \phi - 2\alpha + \beta$
 $\Rightarrow \phi = 5\alpha$
- En (A): $2\phi < 180^\circ$
 $\Rightarrow 2(5\alpha) < 180^\circ \Rightarrow \alpha < 18^\circ \dots (II)$
- De (I) y (II): nos quedamos con la última restricción, por lo tanto el mayor valor de α es 17° .

Clave **D**

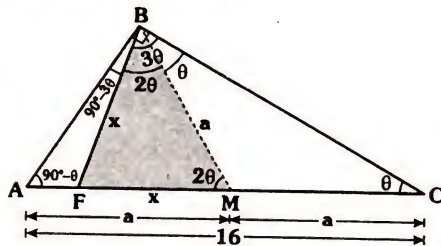
RESOLUCIÓN N° 206



- Nos piden x
- De los datos $\triangle ABP$, $\triangle BQP$ y $\triangle PQC$ son triángulos isósceles.
- En $\triangle ABC$: $5x + 3x + x = 180^\circ$
 $\therefore x = 20^\circ$

Clave E

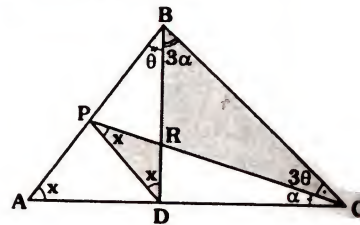
RESOLUCIÓN N° 207



- Piden el menor valor entero de x .
- Se traza \overline{BM} tal que $m\angle CBM = \theta$
 $\Rightarrow \triangle BCM$ y $\triangle ABM$: isósceles
 $\Rightarrow BM = MC = AM = a$
 $2a = 16 \Rightarrow a = 8$
 $\triangle FBM$: isósceles $\Rightarrow FB = FM = x$
Por existencia: $a < x + x$
 $\Rightarrow 8 < 2x$
 $\Rightarrow 4 < x$
- Por lo tanto el menor valor entero de x es: 5.

Clave C

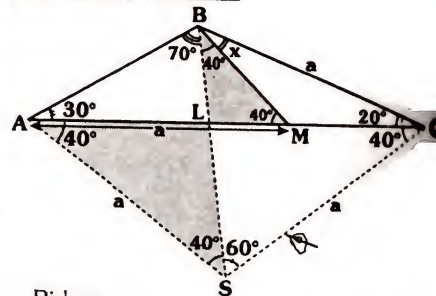
RESOLUCIÓN N° 208



- Nos piden: x
- En $\triangle ABC$: $x + 4(\alpha + \theta) = 180^\circ$
- En la parte sombreada:
 $x + x = 3(\alpha + \theta) \Rightarrow \frac{2}{3}x = \alpha + \theta$
- En (I): $x + 4\left(\frac{2}{3}x\right) = 180^\circ$
 $\therefore x = \frac{540^\circ}{11}$

Clave

RESOLUCIÓN N° 209



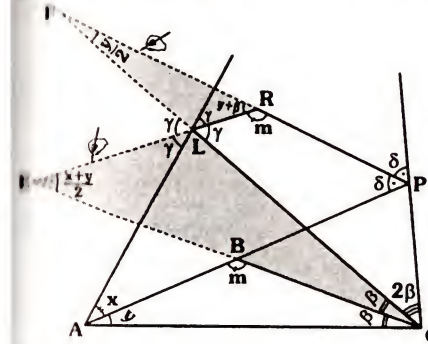
- Piden: x
- Se traza \overline{CS} tal que $m\angle ACS = 40^\circ$
 $CS = a \Rightarrow \triangle BCS$ es equilátero
- Como $SC = SB$ y $m\angle BSC = 2(m\angle BAC)$ de la observación indicada en el estudio del triángulo isósceles $\Rightarrow SA = a$
- Luego el $\triangle ASB$ es isósceles $\Rightarrow SB = a$
- Como $AM = SB$ y $\triangle ALS$ es isósceles

(Al LS)

- $LM = LB \Rightarrow \triangle LBM$ es isósceles
 $\Rightarrow m\angle LBM = m\angle BLM = 40^\circ$
- En $\triangle BMC$: $x + 20^\circ = 40^\circ$
 $\therefore x = 20^\circ$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 210



Piden: $\frac{x}{y}$

En $\triangle APC$ y $\triangle ALC$, por ángulo entre bisectrices (teorema 27):

$$m\angle LEC = \frac{m\angle LAC}{2} \Rightarrow m\angle LEC = \frac{x+y}{2}$$

$$m\angle PFC = \frac{m\angle PAC}{2} \Rightarrow m\angle PFC = \frac{y}{2}$$

- En $\triangle ABC$: $m + y + \beta = 180^\circ$
 $\Rightarrow m\angle ERF = y + \beta$

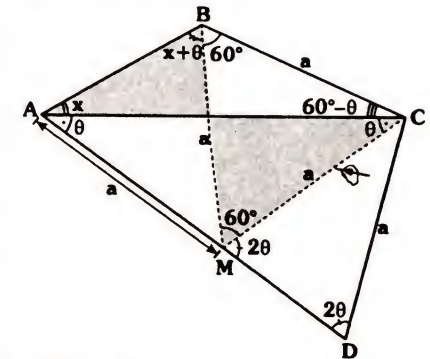
En la parte sombreada (\angle):

$$\frac{x+y}{2} + \beta = \frac{y}{2} + y + \beta$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = 2$$

Clave B

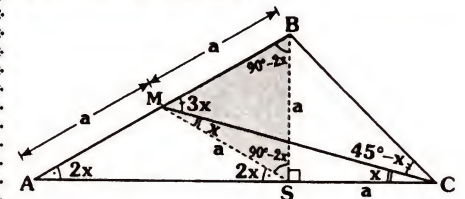
RESOLUCIÓN N° 211



- Piden: x
- Se traza \overline{CM} tal que $m\angle ACM = \theta \Rightarrow \triangle ACM$ y $\triangle MCD$ es isósceles.
- Como $m\angle ACM = 60^\circ$ y $BC = CM \Rightarrow \triangle BMC$ es equilátero
 $\Rightarrow MA = MB \Rightarrow m\angle ABM = x + \theta$
- En la parte sombreada (\angle):
 $x + x + \theta = 60^\circ + \theta$
 $\therefore x = 30^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 212

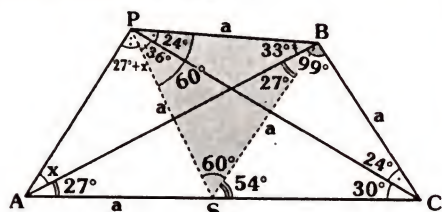


- Piden: x
- Se traza \overline{MS} tal que $m\angle CMS = x$
 $\Rightarrow \triangle AMB$ y $\triangle SMC$: isósceles $\Rightarrow MS = SC = a$

- Como $MB=MS$ y $m\angle SMB = 4x$
 $m\angle MSB = m\angle MBS = 90^\circ - 2x$
 $\Rightarrow m\angle BSC = 90^\circ \Rightarrow \triangle BSC$:
 isósceles $\Rightarrow SC = BS = a$
 $\Rightarrow \triangle MBS$: equilátero $\Rightarrow 4x = 60^\circ$
 $\therefore x = 15^\circ$

Clave C

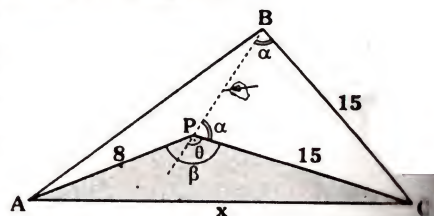
RESOLUCIÓN N° 213



- Piden: $m\angle APC$
- Al completar ángulos, verificamos:
 $m\angle BCA = 2(m\angle BAC)$
- Luego se traza \overline{BS} tal que:
 $m\angle ABS = 27^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ABS$ y $\Rightarrow \triangle SBC$ son isósceles
 $\Rightarrow AS = SB = BC = a$
- También $\triangle PSB$: equilátero
 $\Rightarrow AS = SP \Rightarrow m\angle APS = 27^\circ + x$
- En $\triangle APS$, por ángulo exterior:
 $2x + 54^\circ = 60^\circ + 54^\circ$
 $\Rightarrow x = 30^\circ$
- Como nos piden $m\angle APC$: $27^\circ + 30^\circ + 36^\circ$
 $\therefore m\angle APC = 93^\circ$

Clave A

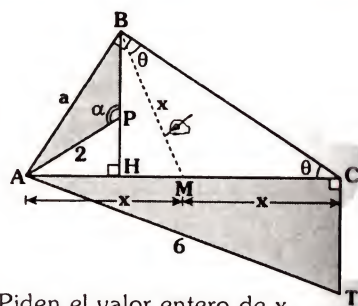
RESOLUCIÓN N° 214



- Piden el menor valor entero de x
- En $\triangle APC$, por existencia:
 $7 < x < 23$... (I)
- También $\triangle BPC$: isósceles
 $\Rightarrow \alpha < 90^\circ \Rightarrow \theta > 90^\circ$
- Como $\beta > \theta \Rightarrow \beta > 90^\circ \Rightarrow \triangle APC$ es obtuso, por teorema 21:
 $x^2 > 8^2 + 15^2$
 $\Rightarrow x > 17$... (II)
- De (I) y (II):
 $17 < x < 23$
- Por lo tanto el menor valor entero de x es 18.

Clave C

RESOLUCIÓN N° 215

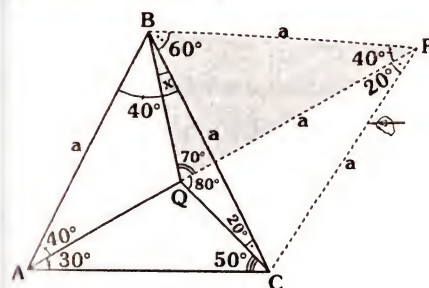


- Piden el valor entero de x .

- Si trazamos \overline{BM} tal que
 $m\angle CBM = \beta$, se verifica:
 $AM = MC = MB$
- En $\triangle ABP$: $\alpha > 90^\circ \Rightarrow a > 2$... (I)
- En $\triangle ABM$: $a < 2x$... (II)
- De (I) y (II): $2x > a > 2$
 $\Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow x > 1$... (III)
- En $\triangle ACT$: $2x < 6 \Rightarrow x < 3$... (IV)
- De (III) y (IV):
 $1 < x < 3$
- Por lo tanto el valor entero de x es: 2

Clave A

RESOLUCIÓN N° 216



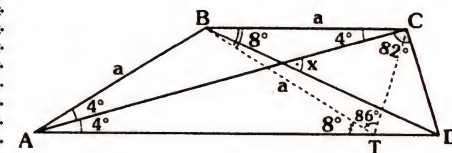
- Piden: x
- Como $m\angle BAQ = 40^\circ$ y $m\angle BQR = 70^\circ$, de acuerdo a los criterios de trazos auxiliares, se prolonga \overline{AQ} y se traza \overline{BR} tal que $m\angle BRA = 40^\circ \Rightarrow BR = a$
- Como: $CB = BR = a$
 $m\angle CBR = 60^\circ \Rightarrow \triangle CBR$ es equilátero $\Rightarrow CR = a$
- Luego:
 $\triangle QRC$: isósceles $\Rightarrow QR = RC = a$
- Como
 $QR = RB \Rightarrow m\angle BQR = m\angle QBR = 70^\circ$

$$\Rightarrow 60^\circ + x = 70^\circ$$

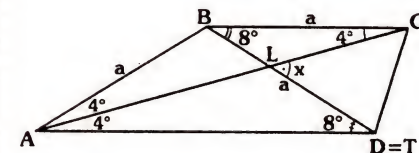
$$\therefore x = 10^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 217



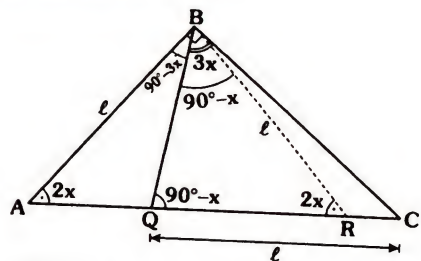
- Piden: x
- Del gráfico $AB=BC$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ desde B se va a trazar el segmento \overline{BT} , tal que $BT=a$ y $T \in \overline{AD}$.
- Para "T" se tiene las siguientes posibilidades:
 - "T" esté a la izquierda de D (como en el gráfico).
 - "T" esté a la derecha de D.
 - "T" coincida con D.
- Tomando el primer caso, se tendrá:
 $\triangle BTC$ isósceles
 $\Rightarrow m\angle BCT = m\angle BTC = 86^\circ$
 con ello se deduce $m\angle ACT = 82^\circ$, lo cual no puede ser, pues $m\angle ACD = 82^\circ$.
- En forma análoga se descarta la segunda posibilidad con ello se deduce: $T=D$, el gráfico quedaría así:



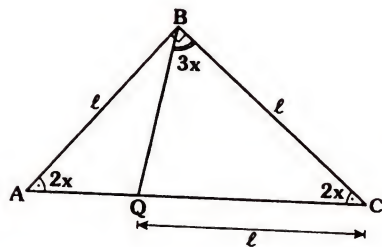
- En $\triangle ALD$: $x = 4^\circ + 8^\circ$
 $\therefore x = 12^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 218



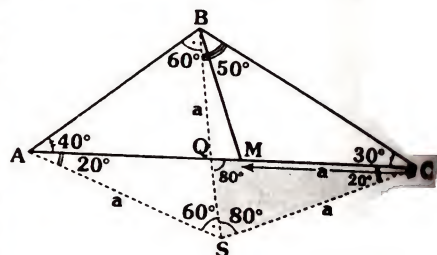
- Piden: x
- Completando ángulos se tiene :
 $m\angle BAC = 2x$ y $m\angle BQC = 90^\circ - x$
- Se traza \overline{BR} tal que $m\angle BRA = 2x$, pero para el punto R, así como el problema anterior hay tres posibilidades.
- Como $\triangle ABR$ y $\triangle QRB$:
 isósceles $\Rightarrow AB = BR = QR = l$
 pero $QC = l$, es decir: $QR = QC$, de donde se deduce $R = C$, el gráfico quedaría, así:



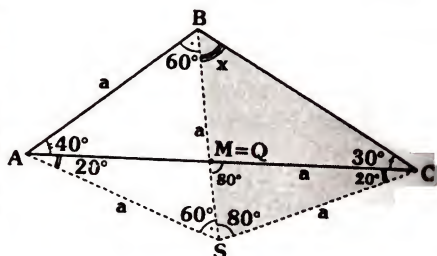
- Como $AB = BC \Rightarrow 2x + 2x = 90^\circ$
 $\therefore x = 22^\circ 30'$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 219



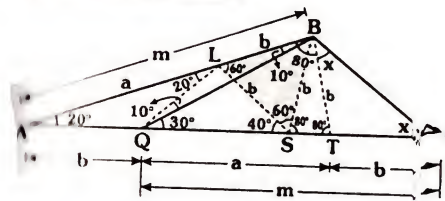
- Piden: x
- Se traza \overline{AS} y tal que: $\triangle ABS$ equilátero, con ello tendremos:
 $AS = SB = a$ y $m\angle ASB = 2(m\angle ACB)$
 $\Rightarrow SC = a$ (De la observación indicada en el estudio del triángulo isósceles, ver pág. 22).
- $\triangle BSC$: isósceles $\Rightarrow m\angle SBC = m\angle SCB = 90^\circ$
 $\Rightarrow m\angle SCM = 20^\circ \Rightarrow \triangle SQC$: isósceles
 $\Rightarrow QC = CS = a$, pero por dato: $CM = a$
- Es decir: $CM = CQ = a \Rightarrow M = Q$, el gráfico quedaría, así:



- De donde: $x = 50^\circ$

Clave **C**

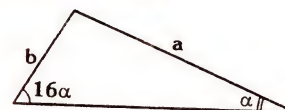
RESOLUCIÓN N° 220



- Nos piden: x
- En $\triangle AQB$ se tiene:
 $m\angle BAQ = 2(m\angle ABL)$
 Se traza \overline{QL} tal que:
 $m\angle BQL = 10^\circ \Rightarrow AQ = QL = LB = b$
- Se traza luego \overline{BT} tal que:
 $m\angle ATB = 80^\circ$
 $\triangle ABT$: isósceles $\Rightarrow AB = AT = m$,
 como $m = a + b$
- Del dato: $QC = m \Rightarrow TC = b$
- Se traza \overline{LS} tal que:
 $m\angle ASL = 40^\circ \Rightarrow LS = b$
- Se tendrá luego:
 $SL = LB$ y $m\angle SLB = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle BLS$ equilátero $\Rightarrow SB = b$ y
 $m\angle BST = 80^\circ$
- Luego $\triangle SBT$: isósceles $\Rightarrow TB = b$
- Finalmente, el $\triangle TCB$ es isósceles
 $\Rightarrow x + x = 80^\circ$
 $\therefore x = 40^\circ$

Clave **I**

RESOLUCIÓN N° 221

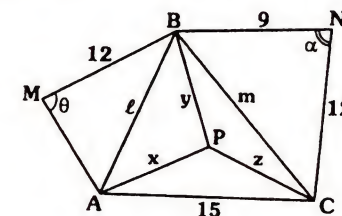


- Nos piden la relación entre a y b .
- Es una aplicación directa del teorema 56, para $n = 16$:

$$b < a < 16b$$

Clave **A**

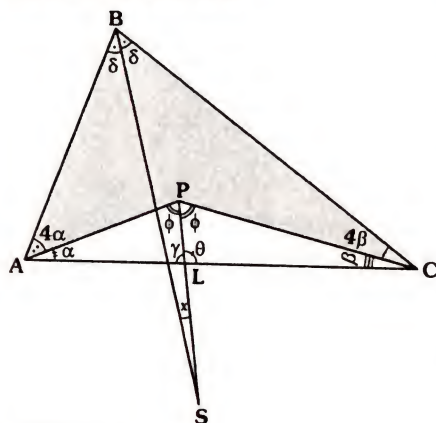
RESOLUCIÓN N° 222



- Piden el mayor valor entero de:
 $x + y + z$
- Dato: - " l " es menor entero
 - " m " es mayor entero
 - $\alpha < 90^\circ$ y $\theta > 90^\circ$
- En $\triangle BNC$, como $\alpha < 90^\circ$
 $\Rightarrow m^2 < 12^2 + 5^2 \Rightarrow m < 13$
- Como " m " es mayor entero $\Rightarrow m = 12$
- En $\triangle AMB$, como $\theta > 90^\circ$, se puede asegurar: $l > 12$
 como l es menor entero $\Rightarrow l = 13$
- En $\triangle ABC$:
 $\frac{l + m + 15}{2} < x + y + z < \overbrace{13 + 15}^{\text{dos mayores}}$
 $\Rightarrow 20 < x + y + z < 28$
- Por lo tanto el mayor valor entero de $x + y + z$, es **27**.

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 229



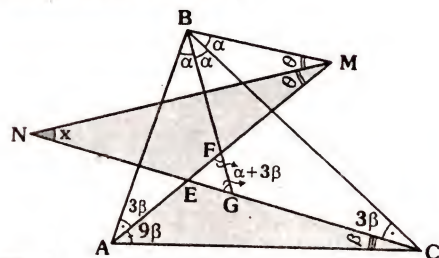
- Piden: x
- Dato: $\theta - \gamma = 20^\circ$
- En la parte sombreada, por teorema 30:

$$x = \frac{4\alpha - 4\beta}{2} \Rightarrow x = 2(\alpha - \beta)$$

- Del gráfico: $\theta = \alpha + \phi$
 $\gamma = \beta + \phi$
 $\Rightarrow \theta - \gamma = \alpha - \beta$
 $\Rightarrow \alpha - \beta = 20^\circ$
 $\therefore x = 40^\circ$

Clave B

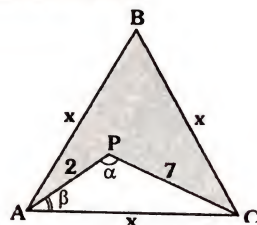
RESOLUCIÓN N° 230



- Piden: x en función de β .
 ΔEFG : isósceles
 $\Rightarrow m\angle EGF = m\angle FFG = \alpha + 3\beta$
 $\Rightarrow m\angle BAF = 3\beta$
- Como
 $m\angle CAM = 3m\angle MAB \Rightarrow m\angle CAM = 90^\circ$
- En ΔABC :
 $2\alpha + 16\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 8\beta = 90^\circ \dots (I)$
- En la parte sombreada ($\angle NMAC$)
 $x + \theta = 10\beta \dots (II)$
- En $\angle NCBM$:
 $x + 3\beta = \alpha + \theta \dots (III)$
- Sumando (II) y (III):
 $2x = 7\beta + \alpha$
 $\Rightarrow 2x = \frac{8\beta + \alpha - \beta}{90^\circ}$
 $\therefore x = 45^\circ - \frac{\beta}{2}$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 231



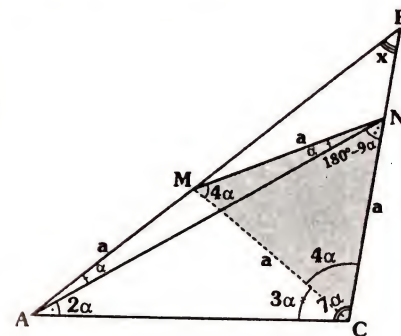
- Piden la razón entre los valores máximo y mínimo entero del perímetro
- Analicemos las restricciones para x .
- En ΔAPC : por existencia
 $5 < x < 9 \dots (I)$

- En la parte sombreada:
 $x + x > 2 + 7 \Rightarrow x > 4,5 \dots (II)$
- Como $\alpha > 60^\circ$ y $\beta < 60^\circ \Rightarrow \alpha > \beta$
- En ΔAPC : $x > 7 \dots (III)$
- De (I), (II) y (III): $7 < x < 9$
- Multiplicando 3:
 $21 < 3x < 27$
 $21 < \text{Perím}_{\Delta ABC} < 27$
 $\Rightarrow \text{Perím}_{\Delta ABC}(\text{máximo entero}) = 26$
 $\text{Perím}_{\Delta ABC}(\text{mínimo entero}) = 22$

- Por lo tanto la razón entre ellos es: $\frac{13}{11}$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 232

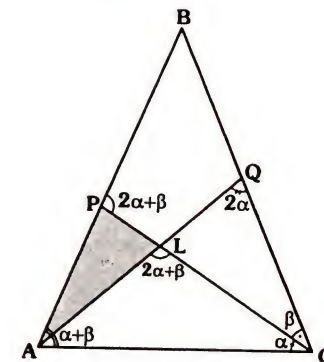


- Piden: x
En ΔABC : $x + 10\alpha = 180^\circ \dots (I)$
En ΔANC : $m\angle CNA = 180^\circ - 9\alpha$
 $\Rightarrow m\angle MNC = 180^\circ - 8\alpha$
- Como
 $MN = NC \Rightarrow m\angle NMC = m\angle MCN = 4\alpha$

- $\Rightarrow m\angle ACM = 3\alpha \Rightarrow AM = MC = a$
 $\Rightarrow \Delta MNC$: equilátero
 $4\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$
- En (I): $x + 10(15^\circ) = 180^\circ$
 $\therefore x = 30^\circ$

Clave D

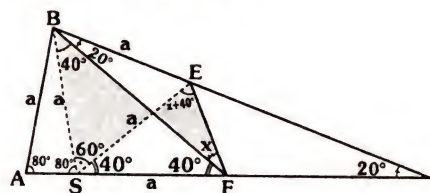
RESOLUCIÓN N° 233



- Nos piden la relación entre AL y AP.
- Sea $m\angle PCB = \beta$
- Como:
 $AB = BC \Rightarrow m\angle BAC = m\angle ACB = \alpha + \beta$
- En ΔAPC , por ángulo exterior:
 $m\angle BPC = 2\alpha + \beta$
- En ΔLQC :
 $m\angle ALC = 2\alpha + \beta$
- Como el ΔALP tiene dos ángulos exteriores de igual medidas \Rightarrow es isósceles
 $\therefore AL = AP$

Clave D

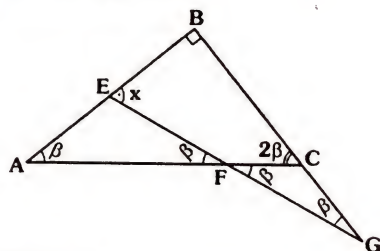
RESOLUCIÓN N° 234



- Piden: x
- En $\triangle ABF$ $m\angle BAC = 2(m\angle BFA)$
- Se traza \overline{BS} tal que $m\angle FBS = 40^\circ$
 $\Rightarrow AB = BS = SF = a$
- Como:
 $BE = BS$ y $m\angle SBE = 60^\circ \Rightarrow \triangle EBS$
 es equilátero $\Rightarrow SE = a$
- $\triangle SEF$ es isósceles
 $\Rightarrow m\angle SFE = m\angle SEF = 40^\circ + x$
- En la parte sombreada:
 $x + x + 40^\circ = 40^\circ + 60^\circ$
 $\therefore x = 30^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 235

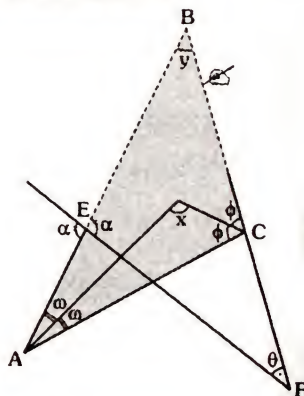


- Piden: x
- Dato: $\triangle AEF$ y $\triangle FCB$: isósceles
- Como $m\angle AEF > 90^\circ$ y $m\angle FCG > 90^\circ$
 $\Rightarrow m\angle EAF = m\angle EFA = m\angle FGC = \beta$

- En $\triangle ABC$: $\beta + 2\beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 30^\circ$
- En $\triangle AEF$: $x = 2\beta$
 $\therefore x = 60^\circ$

Clave II

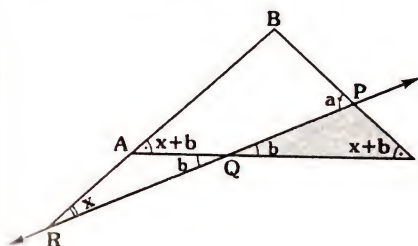
RESOLUCIÓN N° 236



- Piden: $x_{(\text{menor entero})}$
- Dato: $\alpha + \theta < 170^\circ$
- En $\triangle EFB$, como $\alpha + \theta < 170^\circ$
 $\Rightarrow y > 10^\circ$... (I)
- En $\triangle ABC$, por ángulo entre bisectrices
 $x = 90^\circ + \frac{y}{2}$
- En (I): $y > 10^\circ \Rightarrow \frac{y}{2} > 5^\circ$
 $\Rightarrow 90^\circ + \frac{y}{2} > 95^\circ$
 $\Rightarrow x > 95^\circ$
- El menor valor entero de x es 96°

Clave D

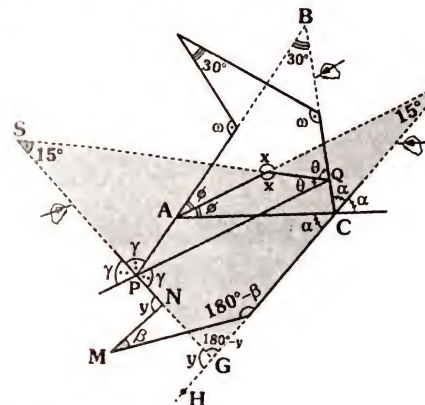
RESOLUCIÓN N° 237



- Piden: x en función de a y b
- Dato: $\triangle ABC$ es isósceles (de base AC)
 $\Rightarrow m\angle BAC = m\angle BCA = x + b$
- En $\triangle QPC$: $x + 2b = a$
 $\therefore x = a - 2b$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 238



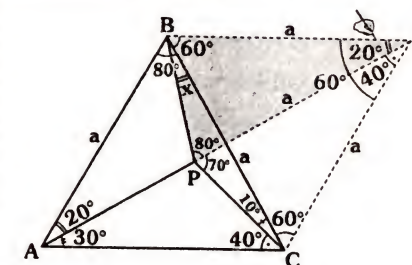
- Se nos pide: $x + y$
- Por teorema 27 (ángulo entre bisectrices), en:
 $\triangle ABC$: $m\angle AEC = \frac{30^\circ}{2} \Rightarrow m\angle AEC = 15^\circ$

$$\triangle PBQ: m\angle PSQ = \frac{30^\circ}{2} \Rightarrow m\angle PSQ = 15^\circ$$

- Se tiene $\overline{MN} \parallel \overline{GC} \Rightarrow m\angle HGS = y$
- En la parte sombreada:
 $x = 15^\circ + 15^\circ + 180^\circ - y$
 $\therefore x + y = 210^\circ$

Clave D

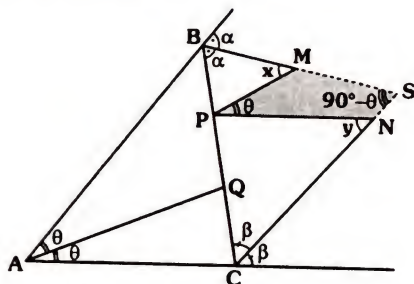
RESOLUCIÓN N° 239



- Piden: x
- Del gráfico $AB = BC$
- Se prolonga \overline{AP} y se traza \overline{BT} tal que:
 $m\angle ATB = 20^\circ \Rightarrow BT = a$
- Se tiene entonces $CB = BT$ y
 $m\angle CBT = 60^\circ \Rightarrow \triangle CTB$ es equilátero
 $\Rightarrow CT = a$ y como $m\angle TPC = m\angle PCT = 70^\circ$
 $\Rightarrow \triangle PTC$ es isósceles ($PT = TC = a$)
- $\triangle PTB$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle PCB = m\angle BPT = 80^\circ$
 $\Rightarrow x + 60^\circ = 80^\circ$
 $\therefore x = 20^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 240



- Piden: $x + y$
- Como $\overline{PM} \parallel \overline{AQ}$ y $\overline{AC} \parallel \overline{PN} \Rightarrow m\angle NPM = \theta$
- En $\triangle ABC$, por ángulo entre bisec-trices (teorema 26):

$$m\angle BSC = 90^\circ - \frac{m\angle BAC}{2}$$

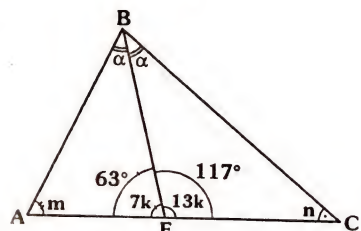
$$\Rightarrow m\angle BSC = 90^\circ - \theta$$
- En $\triangle PMSN$:

$$x + y = 90^\circ - \theta + \theta$$

$$\therefore x + y = 90^\circ$$

Clave E

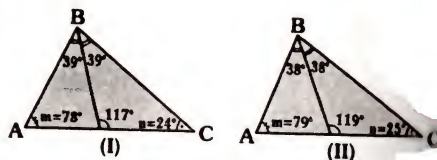
RESOLUCIÓN N° 241



- Nos piden la medida del menor ángulo interior del $\triangle ABC$.

- Dato: $\triangle ABC$ es escaleno y las medidas de sus ángulos interiores son menores que 80°
- $7k + 13k = 180^\circ \Rightarrow k = 9^\circ$
- Dato: $m < 80^\circ$, $n < 80^\circ$ y $2\alpha < 80^\circ \Rightarrow \alpha < 40^\circ$
- En $\triangle ABF$: $m + \alpha = 117^\circ$
- Como:

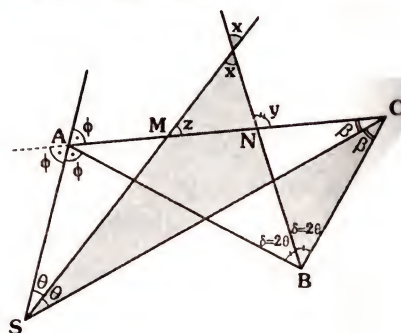
$$\alpha < 40^\circ \Rightarrow \frac{\alpha + m}{2} < 40^\circ + m \Rightarrow 77^\circ < m$$
- Del dato: $77^\circ < m < 80^\circ$
 m tiene dos valores enteros: 78° y 79° , con ellos tenemos los siguientes triángulos:



- Pero en el caso I, resulta ser un \triangle isósceles, la condición solo cumple el caso II.
- Por lo tanto la medida del menor ángulo es 25° .

Clave C

RESOLUCIÓN N° 242



- Piden: $\frac{x}{y}$
- En $\triangle ABC$, por ángulo entre bisec-trices (teorema 27):

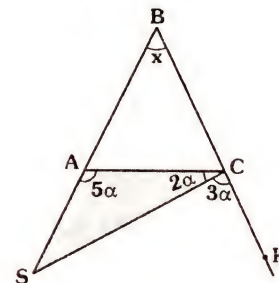
$$m\angle ASC = \frac{m\angle ABC}{2} \Rightarrow \delta = 2\theta$$
- En $\triangle SMC$: $z = \beta + \theta$
- En la parte sombreada:

$$x + \theta = \beta + 2\theta \Rightarrow x = \beta + \theta$$
- Luego: $x = z$
- En $\triangle MLN$: $y = x + z \Rightarrow y = 2x$

$$\therefore \frac{x}{y} = 2$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 243



- Nos piden el mayor valor entero de x
- En $\triangle ACS$: $3\alpha > x$
- Analicemos las restricciones para α :
- Como $\triangle ABC$ es isósceles

$$\Rightarrow m\angle BAC = m\angle ACK = 5\alpha$$

$$\Rightarrow m\angle BAC < 90^\circ \Rightarrow 5\alpha < 90^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha < 18^\circ \quad \dots (I)$$
- $5\alpha < 180^\circ \Rightarrow \alpha < 36^\circ \quad \dots (II)$

- En $\triangle ACB$:

$$5\alpha + 2\alpha < 180^\circ \Rightarrow \alpha < \frac{180^\circ}{7} \quad \dots (III)$$
- De (I), (II) y (III):

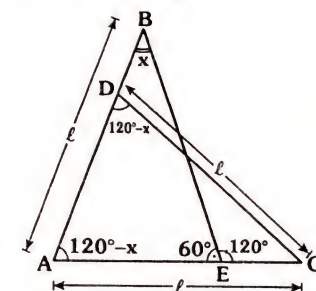
$$18^\circ < \alpha < \frac{180^\circ}{7}$$
- Como: $x < 3\alpha$ y

$$\alpha < \frac{180^\circ}{7} \Rightarrow 3\alpha < \frac{540^\circ}{7}$$

$$\Rightarrow x < \frac{540^\circ}{7} \Rightarrow x < 77,1^\circ$$
- Por lo tanto el mayor valor entero de x es 77° .

Clave A

RESOLUCIÓN N° 244



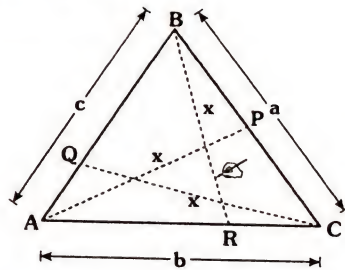
- Nos piden la cantidad de valores enteros de x .
- En $\triangle ACD$ isósceles

$$120^\circ - x < 90^\circ \Rightarrow 30^\circ < x \quad \dots (I)$$
- En $\triangle AEB$:

$$AE < l \Rightarrow x < 60^\circ \quad \dots (II)$$
- De (I) y (II): $30^\circ < x < 60^\circ$
- La cantidad de valores enteros es 19.

Clave D

RESOLUCIÓN N° 245



- Nos piden el intervalo para x .

- Dato: $AP = CQ = BR$

$$\frac{a+b+c}{2} = p$$

- Por teorema:

$$p - a < x < p$$

$$p - b < x < p$$

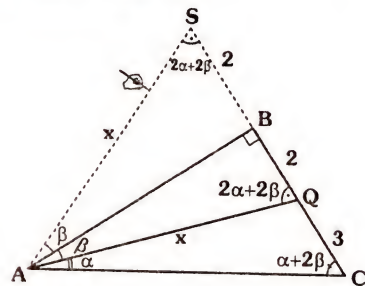
$$p - c < x < p$$

$$\Rightarrow 3p - (a+b+c) < 3x < 3p$$

$$\therefore \frac{p}{3} < x < p$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 246



- Piden: x

- Dato: $2\alpha + 3\beta = 90^\circ$

- Se prolonga \overline{CB} y se traza \overline{AS} , tal que:

$$m\angle ASB = 2\alpha + 2\beta \Rightarrow AQ = AS = x$$

$$\text{y } SB = BQ = 2$$

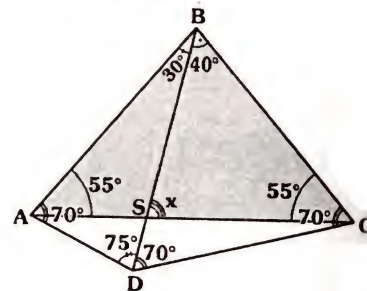
- Como: $m\angle CAS = m\angle ACS = \alpha + 2\beta$

$$\Rightarrow AS = SC$$

$$\therefore x = 7$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 247



- Piden: x

- De los datos, se verifica:

$$m\angle BDC = m\angle DCB = 70^\circ$$

$$m\angle BDA = m\angle DAB = 75^\circ$$

$$\Rightarrow AB = BD = BC = \ell$$

$$\Rightarrow \triangle ABC : \text{isósceles}$$

$$\Rightarrow m\angle BAC = m\angle ACB = 55^\circ$$

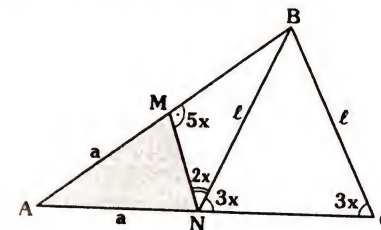
- En $\triangle SAB$:

$$x = 30^\circ + 55^\circ$$

$$\therefore x = 85^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 248



- Nos piden el número de valores enteros de $m\angle BNM$.

- En el gráfico:

$$m\angle BNM = 2x$$

- Analicemos todas las restricciones para x :

$$\text{En } \triangle AMN (\text{isósceles})$$

$$5x > 90^\circ \Rightarrow x > 18^\circ \quad \dots (I)$$

$$\text{En } \triangle BNC (\text{isósceles})$$

$$3x < 90^\circ \Rightarrow x < 30^\circ \quad \dots (II)$$

$$\text{En } \triangle NMB :$$

$$2x + 5x < 180^\circ \Rightarrow x < \frac{180^\circ}{7} \quad \dots (III)$$

$$18^\circ < x < \frac{180^\circ}{7}$$

$$\Rightarrow 36^\circ < 2x < \frac{360^\circ}{7}$$

$$36^\circ < m\angle BNM < 51,43^\circ$$

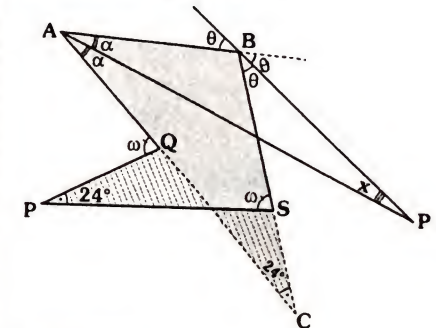
$$\text{El conjunto de valores enteros de } m\angle BNM \text{ es:}$$

$$\{37^\circ; 38^\circ; 39^\circ; \dots; 50^\circ; 51^\circ\}$$

$$\text{El número de valores enteros es } 15.$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 249



- Piden: x

- Al prolongar \overline{AQ} y \overline{BS} se cortan en C , se cumple: $m\angle QCS = 4^\circ$

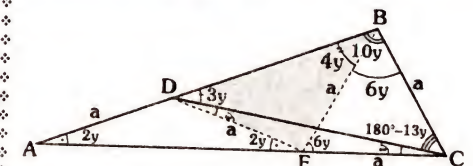
- En $\triangle ABC$, por ángulo entre bisectrices (teorema 27):

$$\text{En } \triangle ABC : m\angle APB = \frac{m\angle ACB}{2}$$

$$\therefore x = 12^\circ$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 250



- Piden: y

- En $\triangle ADC$, como $m\angle DAC = 2(m\angle DCA)$

$$\text{Se traza } \overline{DE} \text{ tal que } m\angle CDE = y$$

$$\Rightarrow AD = DE = EC = a$$

- En $\triangle ECB$, como $EC = CB$ y

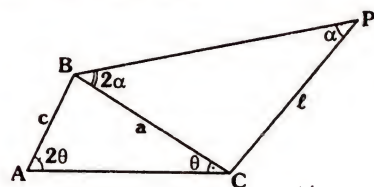
$$m\angle ECB = 180^\circ - 12y$$

$$\Rightarrow m\angle BEC = m\angle EBC = 6y$$

- $\triangle DEB$: isósceles $\Rightarrow DE = EB = a$
 $\Rightarrow \triangle EBC$: equilátero
 $\Rightarrow 4y = 60^\circ$
 $\therefore y = 15^\circ$

Clave **D**

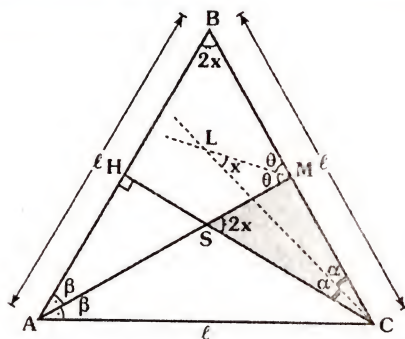
RESOLUCIÓN N° 251



- Nos piden la relación entre c y ℓ .
- Por teorema 39:
 En $\triangle BCP$: $\ell < 2a$... (I)
 En $\triangle ABC$: $a < 2c \Rightarrow 2a < 4c$... (II)
 De (I) y (II): $\ell < 2a < 4c$
 $\therefore \ell < 4c$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 252

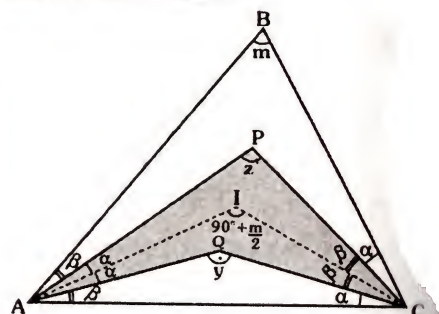


- Piden: $m\angle ABC$
- Dato: $AB = BC$ y $m\angle ABC = 2(m\angle MLC)$

- En $\triangle CMS$, por ejemplo entre bisectrices (teorema 27):
 $m\angle MLC = \frac{m\angle MSC}{2} \Rightarrow m\angle MSC = 2x$
- Luego, como $m\angle ABC = m\angle MSC$
 $\Rightarrow m\angle AMB = 90^\circ$
- Como: $\beta + 2x = 90^\circ \Rightarrow m\angle ACB = 2x$
 $\Rightarrow AB = AC$
- $\triangle ABC$: equilátero $\Rightarrow 2x = 60^\circ$
 $\therefore m\angle ABC = 60^\circ$

Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 253

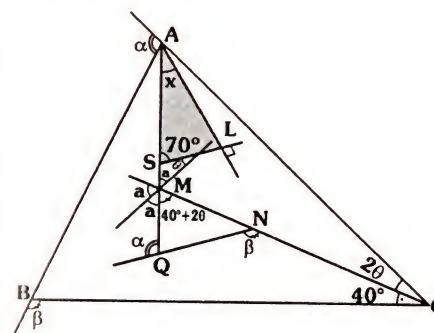


- Piden el mayor valor entero de: $x + y$
- Dado: $\triangle ABC$ es acutángulo
- Se traza las bisectrices de los ángulos BAC y ACB, las cuales se cortan en I.
- Por teorema 25:
 $m\angle AIC = 90^\circ + \frac{m}{2}$
- En la parte sombreada, por teorema 29:
 $\frac{x+y}{2} = 90^\circ + \frac{m}{2}$

- Como $\triangle ABC$ es acutángulo $\Rightarrow m < 90^\circ$
 $\frac{m}{2} < \frac{90^\circ}{2} \Rightarrow 90^\circ + \frac{m}{2} < 135^\circ$
 $\Rightarrow \frac{x+y}{2} < 135^\circ \Rightarrow x+y < 270^\circ$
- Por lo tanto el mayor valor entero de $x+y$ es: **269°**

Clave **A**

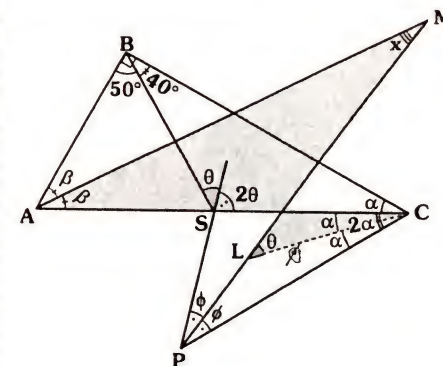
RESOLUCIÓN N° 254



- Piden: x
- En $\triangle ABC$ y $\triangle MNQ$, tienen dos partes de ángulos exteriores respectivamente iguales:
 $\Rightarrow m\angle ACB = m\angle QMN = 40^\circ + 2\theta$
 $\Rightarrow 2a + 40^\circ + 2\theta = 180^\circ \Rightarrow a + \theta = 70^\circ$
- En $\triangle ALS$:
 $x + 70^\circ = 90^\circ$
 $\therefore x = 20^\circ$

Clave **E**

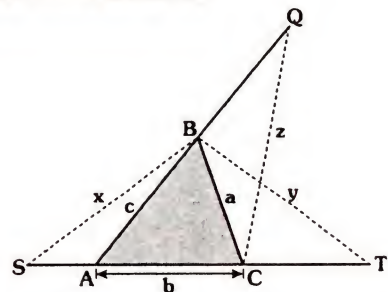
RESOLUCIÓN N° 255



- Nos piden x en función de β .
- En $\triangle PCS$ se traza \overline{CL} , bisectriz del $\angle SCP \Rightarrow 2\theta = 2\alpha + 2\phi \Rightarrow \theta = \alpha + \phi$
- En $\triangle PLC$: $m\angle MLC = \frac{\alpha + \phi}{\theta}$
- En la parte sombreada (Σ):
 $x + \beta = \alpha + \theta$... (I)
- En $\triangle ABC$: $\alpha = 90^\circ - 2\beta$
- En $\triangle ABS$:
 $3\theta = 2\beta + 50^\circ \Rightarrow \theta = \frac{2\beta + 50^\circ}{3}$
- En (I):
 $x + \beta = (90^\circ - 2\beta) + \frac{(2\beta + 50^\circ)}{3}$
 $\therefore x = \frac{320^\circ - 7\beta}{3}$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 256



- Piden el menor valor entero de:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}$$

- Dato: $\frac{a+b+c}{2} = p$

$$xyz = \frac{1}{k^3}$$

- Sea: $E = \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}$

- Por teorema 44:

$$\begin{aligned} y &> p-c \\ x &> p-a \\ z &> p-b \end{aligned}$$

- Multiplicando:

$$\begin{aligned} xyz &> (p-a)(p-b)(p-c) \\ \Rightarrow \frac{1}{k^3} &> (p-a)(p-b)(p-c) \\ \Rightarrow \frac{1}{k} &> \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

- Usando el siguiente teorema: $MG \geq MH$ para $(p-a), (p-b)$ y $(p-c)$

$$\frac{1}{k} > \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \geq \frac{3}{\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} > \frac{3}{\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}}$$

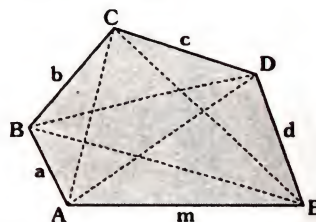
$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}}_E > 3k$$

$$\Rightarrow E > 3k$$

- Como k es entero, el menor valor entero de k es $3k+1$.

Clave C

RESOLUCIÓN N° 257



- Piden entre que valores esta:

$$AC + BD + CE + DA + EB$$

- Dato: $m > d > c > b > a$

$$a+b+c+d+m = \ell$$

- Por existencia en:

$$\triangle ABC: b-a < AC < a+b$$

$$\triangle BCD: c-b < BD < b+c$$

$$\triangle CDE: d-c < CE < d+c$$

$$\triangle ADE: m-d < AD < m+d$$

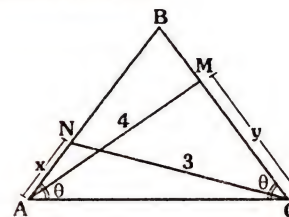
$$\triangle ABE: m-a < EB < m+a$$

- Sumando:

$$2m - 2a < AC + BD + CE + AD + EB < 2\ell$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 258



- Piden el mayor valor entero de: $x+y$

- Dato: $AB=BC$

- Por observación indicado en teorema 45:

$$\triangle ANC: x < 3$$

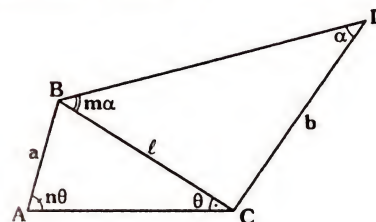
$$\triangle AMC: y < 4$$

$$\Rightarrow x+y < 7$$

- Por lo tanto el mayor valor entero de $x+y$ es: 6

Clave C

RESOLUCIÓN N° 259



- Nos piden la relación entre a, b, m y n.

- Por teorema 56, en:

$$\triangle BCD: b < m\ell \quad \dots (I)$$

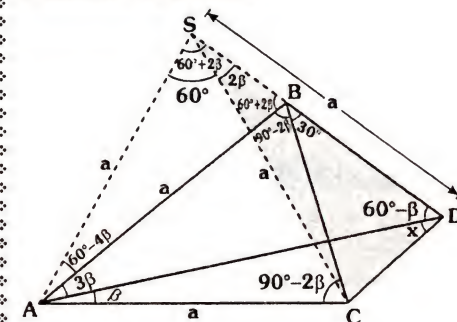
$$\triangle ABC: \ell < na \Rightarrow m\ell < mna \quad \dots (II)$$

- De (I) y (II): $b < m\ell < mna$

$$\therefore b < mna$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 260



- Piden: x

- Completamos ángulos, se tiene:

$$m\angle ABC = m\angle ACB = 90^\circ - 2\beta \Rightarrow AB = AC$$

- También: $m\angle ADB = 60^\circ - \beta$

$$y \quad m\angle ABS = 60^\circ - 2\beta$$

- Se traza \overline{AS} tal que:

$$m\angle ASB = 60^\circ + 2\beta \Rightarrow AB = AS \quad y$$

$$m\angle SAC = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ASC: \text{equilátero} \Rightarrow m\angle CSD = 2\beta \quad y$$

$$CS = SD = a \Rightarrow \triangle CSD: \text{isósceles}$$

$$\Rightarrow m\angle SDC = m\angle SCD = 90^\circ - \beta$$

$$\Rightarrow 60^\circ - \beta + x = 90^\circ - \beta$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave C

Solucionario

Ciclo Repaso

RESOLUCIÓN N° 261

- Analicemos las proposiciones
- I. Como un triángulo se obtiene a partir de tres puntos no colineales, entonces el mayor número de triángulos que se obtiene con 8 puntos como vértices es:

$$C_3^8 = 56$$

La proposición es verdadera.

- II. A partir del estudio de naturaleza del triángulo, como: $4^2 > \sqrt{7}^2 + 2^2$, el triángulo es obtusángulo.

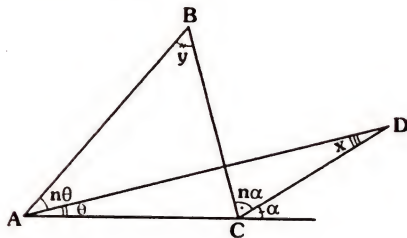
La proposición es verdadera.

- III. Un triángulo escaleno puede ser oblicuángulo (obtusángulo o acutángulo) o rectángulo.

La proposición es falsa.

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 262

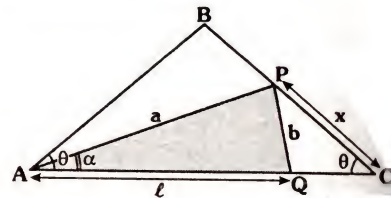


- Piden x , en función de "n" e "y"

- En $\triangle ADC$: $x = \alpha - \theta$
- En $\triangle ABC$: $y = (n+1)\alpha - (n+1)\theta$
 $\Rightarrow y = (n+1)(\alpha - \theta)$
 $\therefore x = \frac{y}{n+1}$

Clave **III**

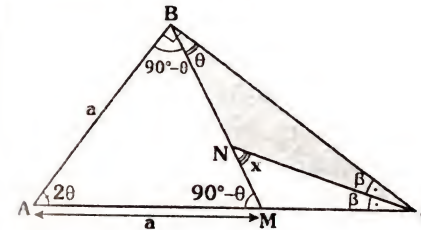
RESOLUCIÓN N° 263



- Nos piden el mayor valor entero de x
- Dato: $a + b + l = 20$
- En $\triangle APC$: como $\alpha < \theta \Rightarrow x < a$... (I)
- En $\triangle APQ$: $a < b + l \Rightarrow 2a < \frac{a+b+l}{2}$
 $\Rightarrow a < 10$... (II)
- De (I) y (II):
 $x < a < 10 \Rightarrow x < 10$
- Por lo tanto el mayor valor entero de x , es **9**

Clave **III**

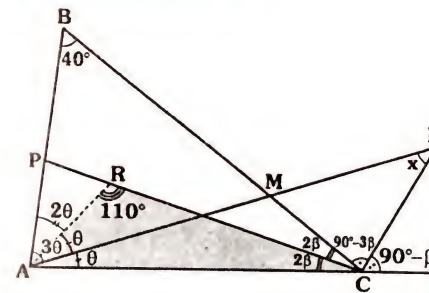
RESOLUCIÓN N° 264



- Piden: x
- $\triangle CBN$: $x = \beta + \theta$
- $\triangle ABM$: isósceles
 $m\angle ABM = m\angle AMB = 90 - \theta$
 $\Rightarrow m\angle BAC = 2\theta$
- En $\triangle ABC$: $2\beta + 2\theta = 90^\circ$
 $\Rightarrow \beta + \theta = 45^\circ$
 $\therefore x = 45^\circ$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 265

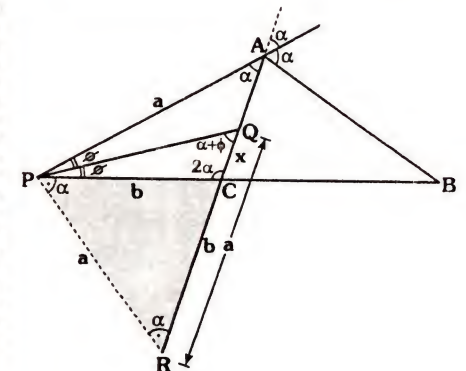


- Piden: x
- De los datos:
 $m\angle BCN = 90^\circ - 3\beta$
 $\Rightarrow m\angle PCN = m\angle NCL = 90^\circ - \beta$

- Se traza \overline{AR} tal que $m\angle BAR = 2\theta$
- Por ángulo entre bisectrices, en:
 $\triangle ABC$: $m\angle ARC = 90^\circ + \frac{40^\circ}{2} = 110^\circ$
 $\triangle ARC$: $m\angle ANC = \frac{110}{2}$
 $\therefore x = 55^\circ$

Clave **E**

RESOLUCIÓN N° 266

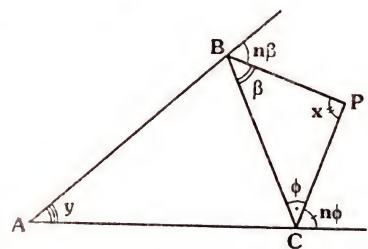


- Piden: x
- Dato: $a - b = 1$ y $AB = BC$
- Como:
 $AB = BC \Rightarrow m\angle PCA = 2\alpha$
- En $\triangle PCA$, se tiene:
 $m\angle PCA = 2(m\angle PAC)$
- Se prolonga \overline{AC} y se traza \overline{PR} tal que $m\angle PRC = \alpha$
 $\Rightarrow PC = RC = b$ y $PA = RP = a$

- Nos piden la suma del mayor y menor valor entero de x .
- Como $AB = BC \Rightarrow BE \parallel AC$
 $m\angle BAE = m\angle BEA \Rightarrow AB = BE = 8$
- En $\triangle ABE$: $x < 8 + 8 \Rightarrow x < 16$... (I)
- Como el triángulo ABC es isósceles:
 $\Rightarrow 2\theta < 90^\circ \Rightarrow \beta > 90^\circ$
- Por teorema 21:
 $x^2 > 8^2 + 8^2$
 $x > 11,31$... (II)
- De (I) y (II):
 $11,31 < x < 16$
- Por lo tanto el mayor valor de x es 15 y el menor es 12. Luego la suma pedida es 27.

Clave C

RESOLUCIÓN N° 273



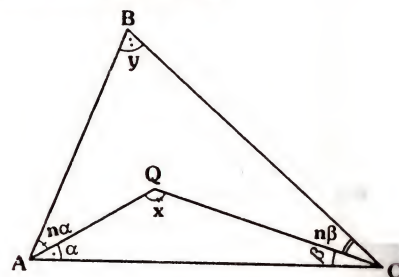
- Piden: x
- $\triangle BPC$: $x + \phi + \beta = 180^\circ$
- En $\triangle ABPC$:
 $n(\phi + \beta) = x + y$
 $\Rightarrow \phi + \beta = \frac{x+y}{n}$

$$\Rightarrow x + \frac{(x+y)}{n} = 180^\circ$$

$$\therefore x = \frac{1}{n+1}(180^\circ n - y)$$

Clave C

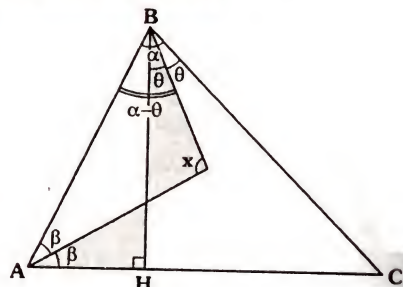
RESOLUCIÓN N° 274



- Nos piden: x
- En $\triangle AQC$: $x + \alpha + \beta = 180^\circ$
- En $\triangle ABCQ$: $x = y + n\alpha + n\beta$
 $\Rightarrow \frac{x-y}{n} = \alpha + \beta \Rightarrow x + \frac{x-y}{n} = 180^\circ$
 $\therefore x = \frac{1}{n+1}(180^\circ n + y)$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 275

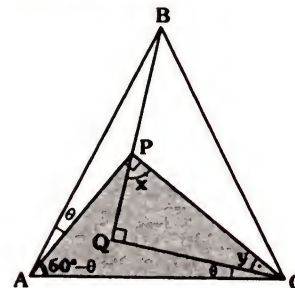


- Piden: x en función de α .

- En $\triangle ABP$:
 $x + \beta + \alpha - \theta = 180^\circ$... (I)
- En la parte sombreada:
 $x + \theta = 90^\circ + \beta$... (II)
- Sumando (I) y (II):
 $2x + \alpha = 270^\circ$
 $\therefore x = 135^\circ - \frac{\alpha}{2}$

Clave B

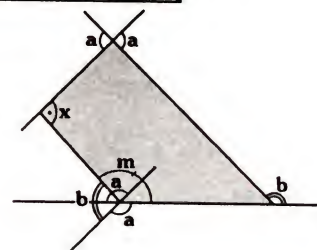
RESOLUCIÓN N° 276



- Piden: x
- En $\triangle APC$: $y + \theta + 60^\circ - \theta = 90^\circ$
 $\Rightarrow y = 30^\circ$
- En $\triangle PQC$: $x + y = 90^\circ$
 $\therefore x = 60^\circ$

Clave D

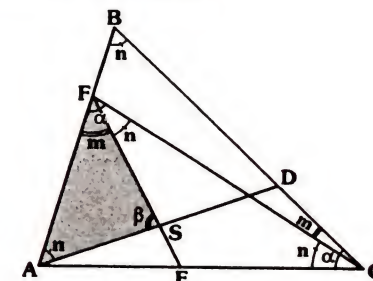
RESOLUCIÓN N° 277



- Piden: x
- Dato: $a + b = 250^\circ$
- Del gráfico: $a + b + m = 360^\circ$
 $\Rightarrow m = 110^\circ$
- En la parte sombreada:
 $x + m = a + b$
 $\Rightarrow x + 110^\circ = 250^\circ$
 $\therefore x = 140^\circ$

Clave B

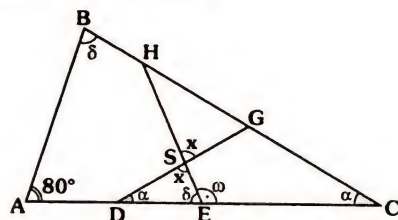
RESOLUCIÓN N° 278



- Piden: $\alpha + \beta$
- Dato: $EF = EC$ y $AD = DB$
 $\Rightarrow m\angle EFC = m\angle ECF = n$
- Como: $m + n = \alpha \Rightarrow m\angle FCB = m$
- En $\triangle FBC$: $m\angle CBF = n$
- En $\triangle ADB$, como $AD = DB$
 $\Rightarrow m\angle DAB = n$
- En $\triangle ABS$: $\frac{m+n}{\alpha} + \beta = 180^\circ$
 $\therefore \alpha + \beta = 180^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 279

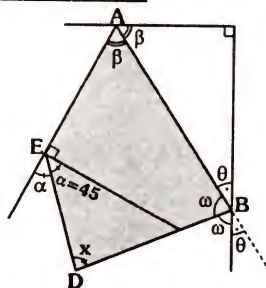


- Piden: x
- Dato: $\delta + \omega = 180^\circ$ y $DG = GC$
 $\Rightarrow m\angle GDC = m\angle DCG$
- En $\triangle ABC$: $\alpha + \delta + 80^\circ = 180^\circ \dots (I)$
- En $\triangle DSE$: $\alpha + \delta + x = 180^\circ \dots (II)$

De (I) y (II):
 $x = 80^\circ$

Clave **B**

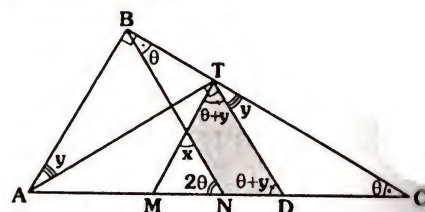
RESOLUCIÓN N° 280



- Piden x en función de θ .
- En $\triangle EABD$:
 $x + \beta = 45^\circ + \omega + \theta$
- Pero: $\beta = 90^\circ - \theta$ y $\omega = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$
 $\therefore x = 45^\circ + \frac{3}{2}\theta$

Clave **B**

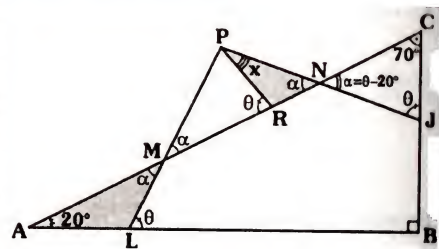
RESOLUCIÓN N° 281



- Piden: $\frac{x}{y}$
- Dato: $MT = MD$ y $NB = NC$
 $\Rightarrow m\angle NBC = m\angle NCB = \theta$
y $m\angle MTD = m\angle TDM = \theta + y$
- En $\triangle NSTD$:
 $x + 2\theta = 2\theta + 2y$
 $\therefore \frac{x}{y} = 2$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 282



- Piden: $x + \theta$
- Dato: $MP = PN$
- En $\triangle ABC$: $m\angle BAC = 20^\circ$
- En $\triangle ALM$: $\alpha + 20^\circ = \theta \dots (I)$
- En $\triangle RNP$: $\alpha + x = \theta \dots (II)$

- De (I) y (II): $x + \alpha = \alpha + 20^\circ$
 $\Rightarrow x = 20^\circ$

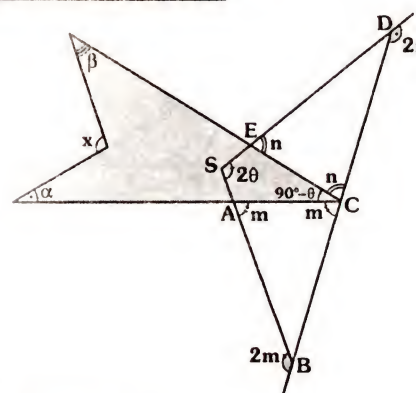
- En $\triangle NJC$:

$70^\circ + \theta + \theta - 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta = 65^\circ$

$\therefore x + \theta = 85^\circ$

Clave **B**

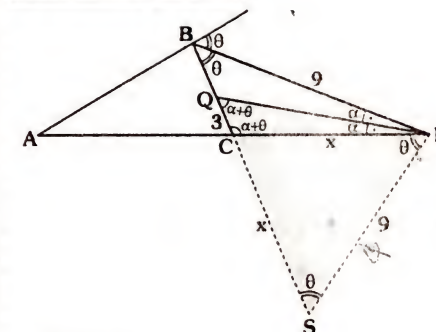
RESOLUCIÓN N° 283



- Piden: x
- Dato: $\alpha + \beta - \theta = 70^\circ$
 $AB = BC$ y $ED = DC$
- En $\triangle BSD$: $2m + 2n = 180^\circ + 2\theta$
 $\Rightarrow m + n = 90^\circ + \theta$
- Luego: $m\angle ECA = 90^\circ - \theta$
- En la región sombreada:
 $x = \alpha + \beta + 90^\circ - \theta$
 $\Rightarrow x = 90^\circ + \alpha + \beta - \theta$
 $\therefore x = 160^\circ$

Clave **A**

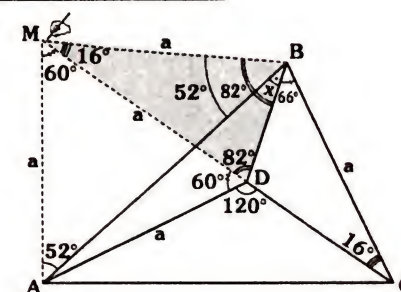
RESOLUCIÓN N° 284



- Piden: x
- Dato: $AB = AC$
- En $\triangle BCP$:
 $m\angle BCP = 2(m\angle CBP)$
- Se prolonga \overline{BC} y se traza \overline{PS} tal que:
 $m\angle PSC = \theta \Rightarrow PS = 9$
- $\triangle CSP$: isósceles $\Rightarrow CS = CP = x$
- En $\triangle SQP$: $QS = SP$
 $x + 3 = 9$
 $\therefore x = 6$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 285

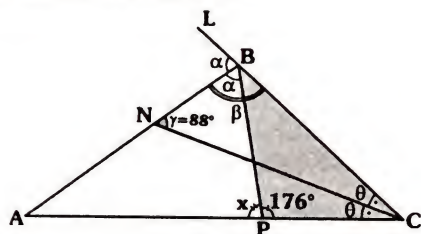


- Piden: x

- Al prolongar \overline{CD} nos damos cuenta:
 $m\angle MDB = 86^\circ$ y $m\angle BCD = 16^\circ$
 (Corresponde a uno de los criterios de trazos auxiliares)
- Se traza \overline{BM} tal que:
 $m\angle BMD = 16^\circ \Rightarrow BC = BM = MD$
- Como $MD = DA$ y $m\angle ADM = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ADM$ es equilátero
 $\Rightarrow AM = MB = a$
- $\triangle AMB$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle MAB = m\angle ABM = 52^\circ$
- En $\triangle DMB$: $x + 52^\circ = 82^\circ$
 $\therefore x = 30^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 286



- Piden: x
- Dato: $\beta + \alpha = 180^\circ$ y γ es el mayor entero par
- Como $\alpha + \beta = 180^\circ$, al prolongar \overline{CB} , se cumple $m\angle ABL = \alpha$, también tendremos $2\alpha < 180^\circ \Rightarrow \alpha < 90^\circ$
- En $\triangle BNC$: $\gamma < \alpha \Rightarrow \gamma < \alpha < 90^\circ$
 $\Rightarrow \gamma < 90^\circ$
- Como γ es mayor entero $\Rightarrow \gamma = 88^\circ$

- En $\triangle BPC$, por ángulo entre bisectrices:

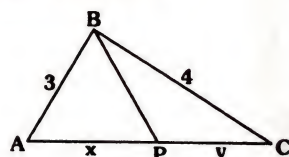
$$m\angle BNC = \frac{m\angle BPC}{2}$$

$$\Rightarrow m\angle BPC = 176^\circ$$

$$\therefore x = 4^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 287

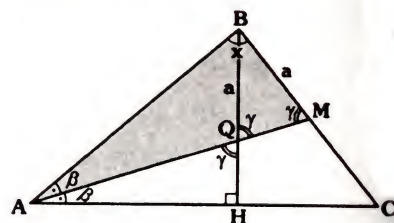


- Piden el mayor valor entero de: xy por existencia:
 $x + y < 7$
- Por dato $x + y$ es mayor entero
 $\Rightarrow x + y = 6$
- Como $MG < MA$, para x e y :

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \Rightarrow xy \leq 9$$
- El mayor valor de xy , es 9.

Clave C

RESOLUCIÓN N° 288

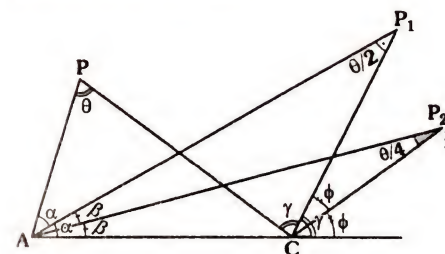


- Piden: x

- En $\triangle ABM$: $x + \beta + \gamma = 180^\circ$
- En $\triangle AHQ$: $\beta + \gamma = 90^\circ$
 $\Rightarrow x + 90^\circ = 180^\circ$
 $\therefore x = 90^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 289



- Por ángulo entre bisectrices se tendrá:
 En P_1 , el ángulo mide: $\theta/2$
 En P_2 , el ángulo mide: $\theta/4$
 En P_3 , el ángulo mide: $\theta/8$
 y así sucesivamente.
- Nos piden E:

Donde: $E = \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{4} + \frac{\theta}{8} + \dots$

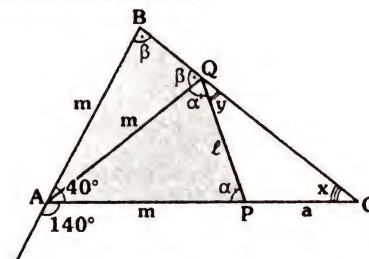
$$\Rightarrow E = \theta + \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{4} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow E = \theta + \frac{1}{2} E$$

$$\therefore E = 2\theta$$

Clave B

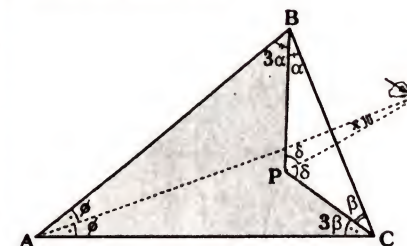
RESOLUCIÓN N° 290



- Piden el mayor valor entero de x .
- Dato: $a > \ell$
- En $\triangle PQC$: como $a > \ell \Rightarrow y > x \dots (I)$
- En $\triangle ABQP$: $\alpha + \beta = 140^\circ + y$
- Pero:
 $\alpha + \beta + y = 180^\circ \Rightarrow 140^\circ + 2y = 180^\circ$
 $\Rightarrow y = 20^\circ$
- En (I): $20^\circ > x$
- Por lo tanto, el mayor valor entero es 19° .

Clave

RESOLUCIÓN N° 291



- Piden: x
- Dato: $m\angle ABC - m\angle BCA = 40^\circ$
 $\Rightarrow 4\alpha - 4\beta = 40^\circ$
 $\Rightarrow \alpha - \beta = 10^\circ$

- En la región sombreada, por teorema 30

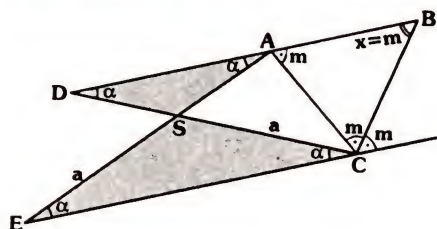
$$x = \frac{3\alpha - 3\beta}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\therefore x = 15^\circ$$

Clave **D**

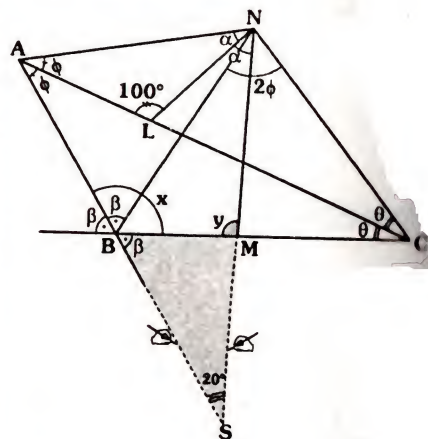
RESOLUCIÓN N° 292



- Piden: x
- Dato: $SE = SC$ y $SD = SA$
 $\Rightarrow \triangle SEC$ y $\triangle SDA$: isósceles
 $\Rightarrow m\angle SEC = m\angle SAD = \alpha$
 $\Rightarrow \overline{DA} \parallel \overline{BC}$
- Por ángulos alternos internos:
 $x = m$
 $\Rightarrow \triangle ABC$ es equilátero
 $\therefore x = 60^\circ$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 293



- Piden: $x + y$
- Dato: $m\angle BNC = 2(m\angle NAC)$
- Por ángulo entre bisectrices, en $\triangle BNC$

$$m\angle BAC = \frac{m\angle BNC}{2}$$

$$\Rightarrow m\angle BAC = \phi$$

- Se prolongan \overline{AB} y \overline{NM} , en $\triangle SNA$

$$m\angle ALN = 90^\circ + \frac{m\angle BSM}{2}$$

$$\Rightarrow m\angle BSM = 20^\circ$$

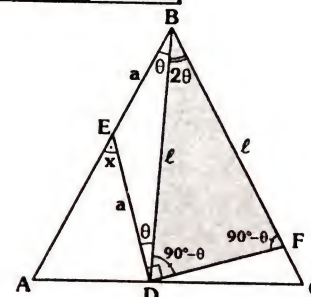
- En $\triangle BSM$:

$$x + y = 180^\circ + 20^\circ$$

$$\therefore x + y = 200^\circ$$

Clave **B**

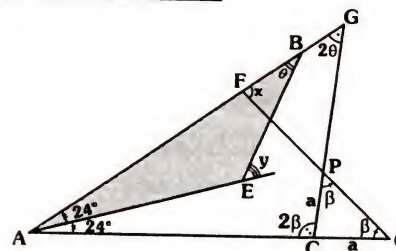
RESOLUCIÓN N° 294



- Piden: x
- Dato: $EB = ED$ y $DF = BD$
 $\Rightarrow \triangle EBD$ y $\Rightarrow \triangle DBF$: isósceles
- En $\triangle EBD$: $x = 2\theta$
- En $\triangle DBF$: $m\angle BDF = m\angle DFB = 90^\circ - \theta$
 $\Rightarrow m\angle FBD = 2\theta$
- Como $\triangle ABC$ es equilátero
 $\theta + 2\theta = 60^\circ \Rightarrow \theta = 20^\circ$
 $\therefore x = 40^\circ$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 295



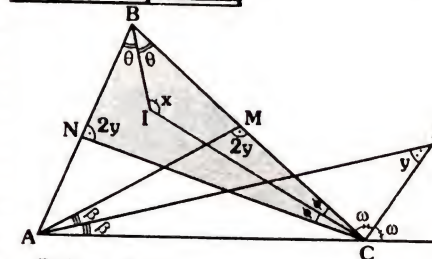
- Piden: $x + y$
- Dato: $CP = CQ$
- En $\triangle ABE$: $y = 24^\circ + \theta$
- En $\triangle AFQ$: $x = 48^\circ + \beta$
 $\Rightarrow x + y = 72^\circ + \theta + \beta$... (I)

- En $\triangle AGC$: $2\theta + 2\beta + 48^\circ = 180^\circ$
 $\Rightarrow \theta + \beta = 66^\circ$

$$\therefore x + y = 138^\circ$$

Clave **D**

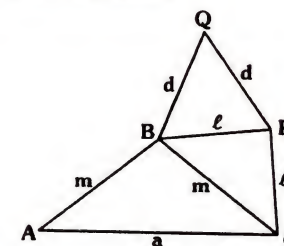
RESOLUCIÓN N° 296



- Piden: $x - y$
- Dato: $m\angle BNC = m\angle AMC$
- En $\triangle AMC$, por ángulo entre bisectrices
 $m\angle AJC = \frac{m\angle AMC}{2} \Rightarrow m\angle AMC = 2y$
- Del dato: $m\angle BNC = 2y$
- En $\triangle NBC$: $x = 90^\circ + \frac{(2y)}{2}$
 $\therefore x - y = 90^\circ$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 297



- Nos piden la relación entre a y d .

En $\triangle ABC$: $a < 2m$... (I)

En $\triangle BPC$: $m < 2\ell \Rightarrow 2m < 4\ell$... (II)

En $\triangle BQP$: $\ell < 2d \Rightarrow 4\ell < 8d$... (III)

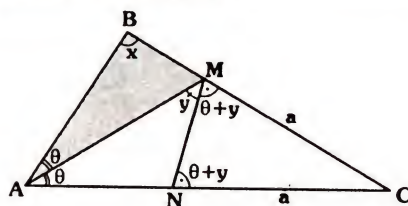
• De (I) y (II) y (III):

$$a < 2m < 4\ell < 8d$$

$$\therefore a < 8d$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 298



• Piden: $x - y$

• Dato: $x + y = 150^\circ$ y $MC = CN$

$\Rightarrow \triangle MNC$ isósceles

• En $\triangle ABM$: $x + \theta = \theta + 2y \Rightarrow x = 2y$

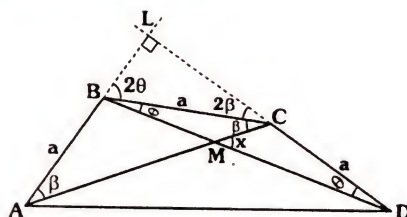
• Del dato: $2y + y = 150^\circ$

$$y = 50^\circ \wedge x = 100^\circ$$

$$\therefore x - y = 50^\circ$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 299



• Piden: x

• Dato: $AB = BC = CD$

$\Rightarrow \triangle ABC$ y $\triangle BCD$ isósceles

• En $\triangle BMC$: $x = \theta + \beta$

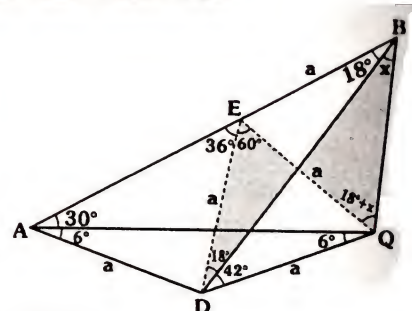
• En $\triangle BLC$: $2\theta + 2\beta = 90^\circ$

$$\Rightarrow \theta + \beta = 45^\circ$$

$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 300



• Piden: x

• Al completar "ángulos" en $\triangle ADB$, se observa:

$$m\angle DAB = 2(m\angle ABD)$$

• Se traza \overline{DE} tal que $m\angle EDB = 18^\circ$

$$\Rightarrow AD = DE = EB = a$$

$$\Rightarrow \triangle DEQ \text{ es equilátero} \Rightarrow EQ = a$$

$$\Rightarrow \triangle EQB \text{ es isósceles}$$

$$\Rightarrow m\angle EQB = m\angle EBQ = 18^\circ + x$$

• En la parte sombreada:

$$x + 18^\circ + x = 18^\circ + 60^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave **D**

Geometría

ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

ANUAL

CEPRE UNI

SEMESTRAL

SEMESTRAL INTENSIVO

REPASO

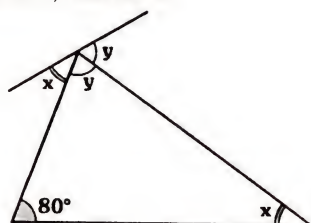
TRIÁNGULOS

Problemas Propuestos

Ciclo Anual

PROBLEMA N° 1

Del gráfico, calcule x .



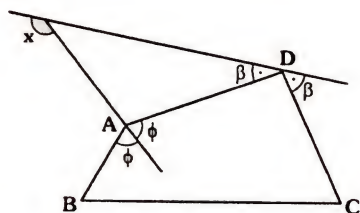
- A) 20° B) 30° C) 40°
D) 25° E) 35°

PROBLEMA N° 2

En el gráfico :

$$m\angle ABC + m\angle BCD = 140^\circ$$

calcule x .



- A) 110° B) 120° C) 140°
D) 160° E) 170°

PROBLEMA N° 3

Se tiene un triángulo en el cual dos de sus lados miden 3 y 6. Si el tercer lado tiene por longitud un número impar. Calcule el menor valor del perímetro.

- A) 12 B) 13 C) 11
D) 14 E) 16

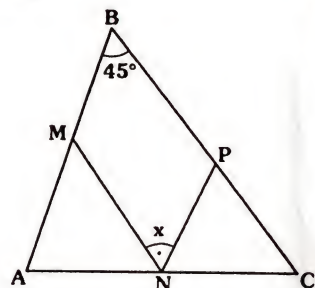
PROBLEMA N° 4

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BD. Si $AB=AD$, $BD=DC$ y $m\angle ABC = 120^\circ$. Calcule $m\angle ACB$

- A) 10° B) 12° C) 20°
D) 30° E) 40°

PROBLEMA N° 5

En el gráfico, $AM=AN$ y $PC=NC$. Calcule x



- A) 39° B) 45° C) 67,5°
D) 36° E) 60°

PROBLEMA N° 6

En el triángulo ABC se cumple:

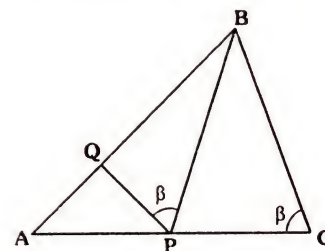
$$AC = 2(AB) \text{ y } m\angle ABC = 3(m\angle BCA)$$

Calcule $m\angle BCA$

- A) 30° B) 25° C) 60°
D) 40° E) 20°

PROBLEMA N° 7

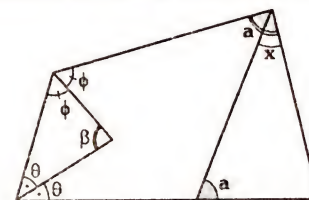
En el gráfico, $AQ=QP$, $PB=BC$ y $AB=16$. Calcule AC



- A) 8 B) 12 C) 16
D) $8\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{3}$

PROBLEMA N° 8

Del gráfico, calcule x en función de β .



- A) $180^\circ - \beta$ B) β
C) $180^\circ - 2\beta$ D) 2β
E) $90^\circ - \beta$

PROBLEMA N° 9

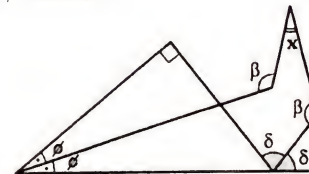
En el triángulo ABC ($AC=CB$), se ubica P y Q en AB y BC respectivamente. Si $PB=QC$. Calcule el menor valor entero de $m\angle BPC$.

- A) 48° B) 60° C) 46°
D) 59° E) 61°

PROBLEMA N° 10

Del gráfico, calcule x

- A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 22,5°
E) 32,5°



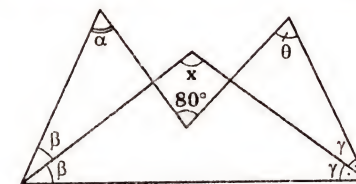
PROBLEMA N° 11

En el triángulo MPN se traza la altura NQ, tal que $m\angle MNQ = 20^\circ$, $m\angle NPM = 40^\circ$ y $NP=6$. Calcule MP

- A) 3 B) 4,5 C) 6
D) 7 E) 8

PROBLEMA N° 12

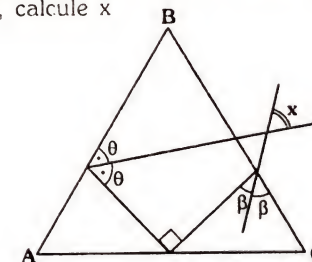
En el gráfico, $\alpha + \theta = 140^\circ$. Calcule x



- A) 60° B) 100° C) 80°
D) 110° E) 120°

PROBLEMA N° 13

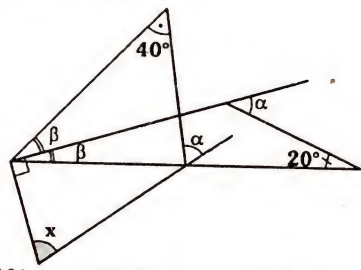
En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, calcule x



- A) 30°
B) 80°
C) 60°
D) 45°
E) 75°

PROBLEMA N° 14

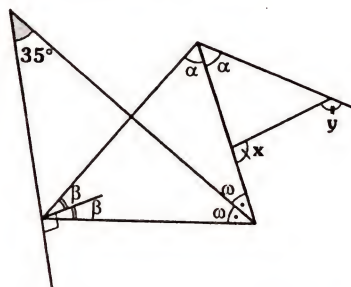
Del gráfico, calcule x .



- A) 50° B) 60° C) 70°
D) 80° E) 40°

PROBLEMA N° 15

Del gráfico, calcule $x + y$.



- A) 220° B) 210° C) 250°
D) 200° E) 170°

PROBLEMA N° 16

En el triángulo ABC se traza la bisectriz exterior BD (D en la prolongación de \overline{AC}) y en el triángulo CBD se traza la bisectriz interior CE. Si $BE=6$; calcule el menor valor entero de CD.

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

PROBLEMA N° 17

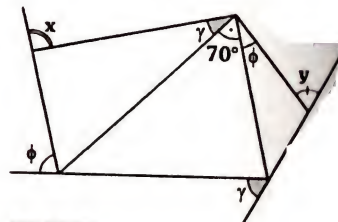
En el triángulo isósceles de base AC, se traza la bisectriz interior CQ. Si $AQ=2$; calcule el valor entero de CQ.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA N° 18

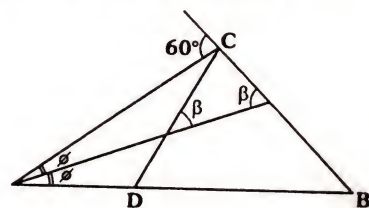
Del gráfico, calcule $x + y$.

- A) 200°
B) 270°
C) 250°
D) 240°
E) 210°



PROBLEMA N° 19

Del gráfico, calcule $m\angle BDC$.

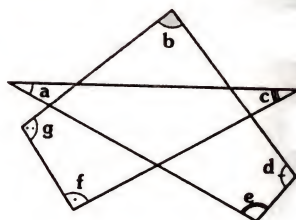


- A) 30° B) 60° C) 45°
D) 35° E) 70°

PROBLEMA N° 20

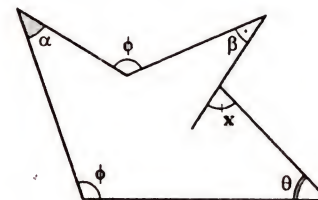
Del gráfico, calcule $a + b + c + d + e + f + g$.

- A) 180°
B) 360°
C) 540°
D) 720°
E) 900°



PROBLEMA N° 21

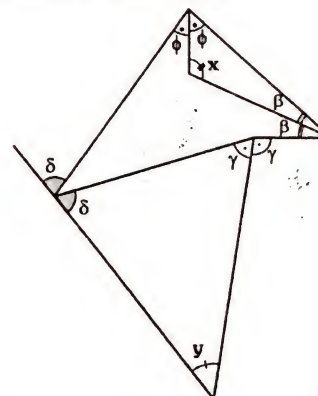
En el gráfico, $\alpha + \beta + \theta = 80^\circ$. Calcule x .



- A) 100° B) 80° C) 160°
D) 140° E) 120°

PROBLEMA N° 22

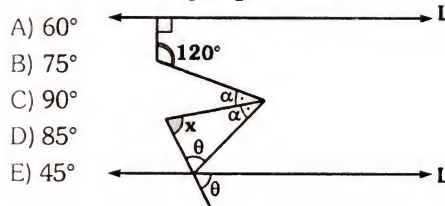
Del gráfico, calcule $x - y$.



- A) 60° B) 75° C) 90°
D) 180° E) 120°

PROBLEMA N° 23

En el gráfico, $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$ calcule x .



- A) 60°
B) 75°
C) 90°
D) 85°
E) 45°

PROBLEMA N° 24

En el triángulo ABC, se trazan la altura AH y la bisectriz interior BE, las cuales se cortan en F. Si $m\angle BAC = 64^\circ$ y $m\angle BCA = 42^\circ$. Calcule $m\angle AFB$.

- A) 107° B) 127° C) 132°
D) 143° E) 150°

PROBLEMA N° 25

En el triángulo isósceles ABC ($AB = BC$), se ubican R y Q en las prolongaciones de \overline{BC} y \overline{AC} respectivamente, se ubica P en \overline{BQ} . Si $AP = PQ$, $BQ = AB + 3$ y $m\angle BRQ = 90^\circ - \frac{m\angle BAP}{2}$.

Calcule CR

- A) 2 B) 5 C) 6
D) 4 E) 3

PROBLEMA N° 26

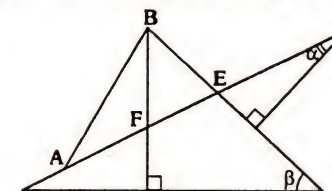
En el triángulo DBE se traza la bisectriz interior DC y en el triángulo DBC se traza la ceviana interior BA. Si $AB = BC$ calcule $\frac{m\angle ABD}{m\angle CED}$.

- A) 1 B) 2 C) 1/2
D) 5/2 E) 3/2

PROBLEMA N° 27

En el gráfico, $AB=6$, $BE=2$ y $\beta + 2\alpha = 90^\circ$. Calcule el valor entero de AF.

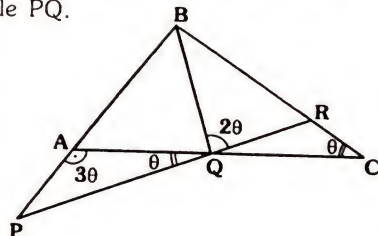
- A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 2



PROBLEMA N° 28

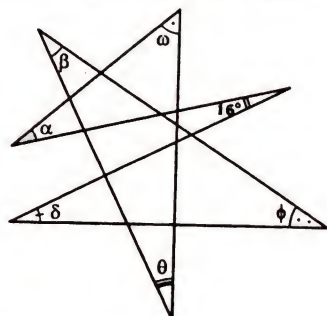
En el gráfico, $AP = 2$ y $BR - RC = 3$.
Calcule PQ.

- A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 3



PROBLEMA N° 29

Calcule $\alpha + \beta + \theta + \delta + \phi + \omega$, en:

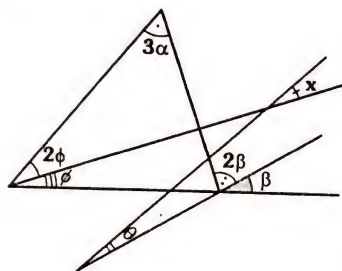


- A) 360°
B) 180°
C) 320°
D) 196°
E) 240°

PROBLEMA N° 30

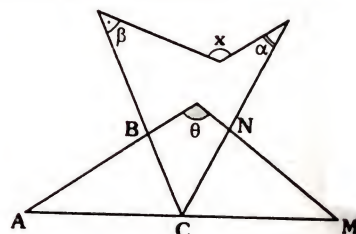
En el gráfico, $\theta + \alpha = 20^\circ$.
Calcule x

- A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 35°
E) 40°



PROBLEMA N° 31

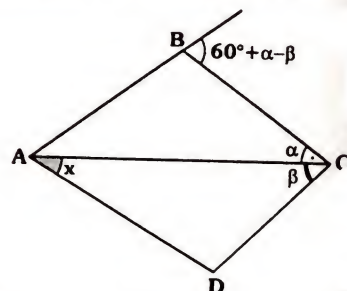
En el gráfico, $AB = AC$; $MC = MN$.
 $\theta = 2(\alpha + \beta)$. Calcule x



- A) 72°
B) 100°
C) 90°
D) 120°
E) 75°

PROBLEMA N° 32

En el gráfico, $AB = BC = CD$. Calcule x



- A) 45°
B) 60°
C) 30°
D) 36°
E) 40°

PROBLEMA N° 33

En el triángulo ABD se ubica C en la región exterior relativa a \overline{BD} . E se encuentra en la prolongación de \overline{AD} .

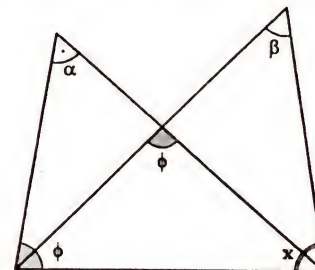
Si $AB = BD = BC$ y $m\angle ABC = 90^\circ$.

Calcule $m\angle EDC$.

- A) 50°
B) 45°
C) 56°
D) 40°
E) 60°

PROBLEMA N° 34

En el gráfico, $\beta + \alpha = 100^\circ$. Calcule x.



- A) 80°
B) 100°
C) 110°
D) 160°
E) 120°

PROBLEMA N° 35

En el triángulo ABC se traza por B una recta paralela a \overline{AC} , la cual es intersectada en P y Q por la bisectrices de los ángulos BAC y ECB en P y Q respectivamente (E en la prolongación de \overline{AC}). Si $AB = 4$ y $BC = 5$. Calcule PQ.

- A) 3
B) 2
C) 1
D) 5
E) 4

PROBLEMA N° 36

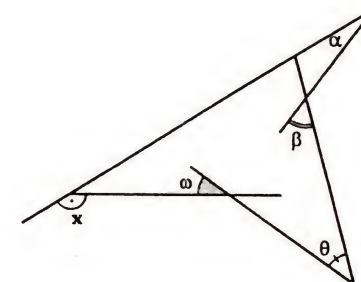
Se tiene la región triangular ABC de perímetro 16, por A se trazan rectas paralelas a las bisectrices interiores (trazadas desde B y C), intersectando a \overline{BC} en M y N. Calcule MN.

- A) 12
B) 20
C) 9
D) 16
E) 8

PROBLEMA N° 37

En el gráfico, $\alpha + \beta + \theta + \omega = 150^\circ$.

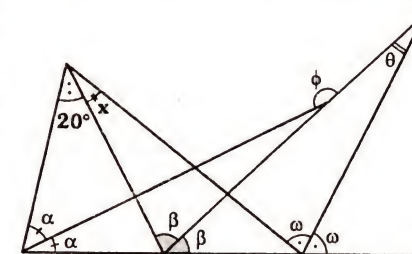
Calcule x.



- A) 130°
B) 140°
C) 150°
D) 110°
E) 120°

PROBLEMA N° 38

En el gráfico, $\phi + \theta = 180^\circ$. Calcule x.



- A) 18°
B) 40°
C) 10°
D) 20°
E) 15°

PROBLEMA N° 39

En el triángulo ABC, se cumple:

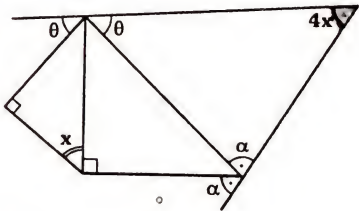
$m\angle BAC = 40^\circ$ y $m\angle ABC = 60^\circ$

se traza la ceviana interior BD, de modo que $AB = BC = CD$. Calcule $m\angle BDC$.

- A) 50°
B) 75°
C) 80°
D) 60°
E) 70°

PROBLEMA N° 40

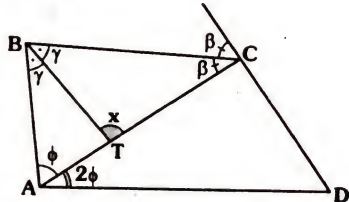
Del gráfico, calcule x .



- A) 30° B) 10° C) 20°
D) 50° E) 40°

PROBLEMA N° 41

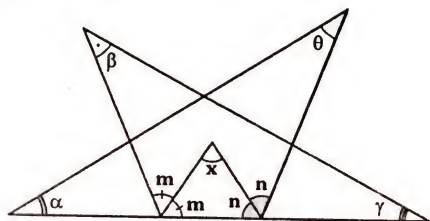
En el gráfico, $2(m\angle BTA) = 5(m\angle CDA)$, calcule x .



- A) 70° B) 80° C) 100°
D) 110° E) 120°

PROBLEMA N° 42

Si $\alpha + \beta + \theta + \gamma = 140^\circ$, calcule x .



- A) 140° B) 100° C) 80°
D) 70° E) 60°

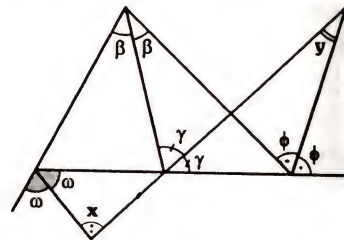
PROBLEMA N° 43

En el triángulo ABC, se ubican en \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} se ubican P, Q y R respectivamente. Si $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$, $\overline{AQ} \cap \overline{PR} = \{S\}$, $AS = AR$ y $AQ = 10$. Calcule $PQ + AR$.

A) 8 B) 7,5 C) 5
D) 10 E) 12,5

PROBLEMA N° 44

Del gráfico, calcule $x + y$.



- A) 45° B) 90° C) 180°
D) 270° E) 135°

PROBLEMA N° 45

En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la altura BH y en el triángulo HBC se traza la ceviana interior BD, tal que $m\angle BAC = 2(m\angle HBD)$, $AB = 8$ y $BC = 15$. Calcule CD.

- A) 8 B) 9 C) 10
D) 7 E) 6

PROBLEMA N° 46

En un triángulo se cumple que las medidas de los ángulos exteriores están en progresión aritmética. Si el menor ángulo interior mide 30° . Calcule la medida del mayor ángulo interior?

- A) 60° B) 75° C) 90°
D) 120° E) 70°

PROBLEMA N° 47

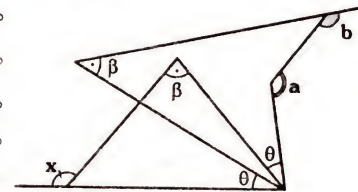
En el triángulo ABC, se ubican los puntos D, F y E en \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{BC} respectivamente. En los triángulos AFD y FEC se trazan las bisectrices interiores \overline{FN} y \overline{FQ} respectivamente. Si $m\angle ABC = 40^\circ$, $AD = DF$ y $FE = EC$. Calcule $m\angle NFQ$.

- A) 100° B) 105° C) 110°
D) 120° E) 140°

PROBLEMA N° 48

En el gráfico, $a + b = 300^\circ$. Calcule x .

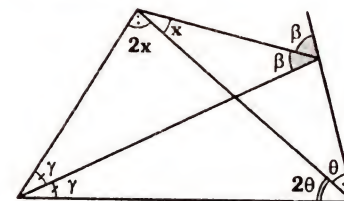
- A) 100°
B) 120°
C) 150°
D) 130°
E) 110°



PROBLEMA N° 49

Del gráfico, calcule x .

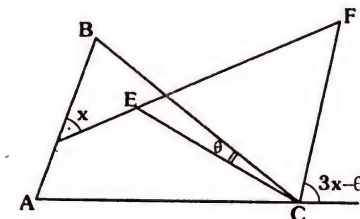
- A) 36°
B) 30°
C) 45°
D) 60°
E) 54°



PROBLEMA N° 50

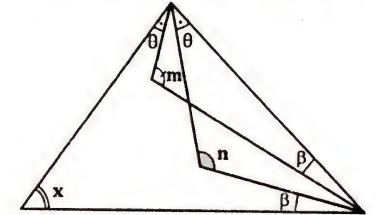
En el gráfico, $AC = BC$ y $CE = CF$, calcule x .

- A) 30°
B) 32°
C) 36°
D) 40°
E) 50°



PROBLEMA N° 51

En el gráfico, $m + n = 6x$. Calcule x .



- A) 30° B) 36° C) 45°
D) 50° E) 60°

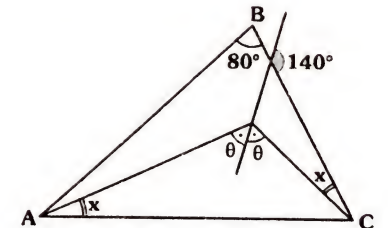
PROBLEMA N° 52

En el triángulo ABC, se ubican en \overline{AC} y \overline{BC} los puntos P y Q respectivamente. Si $AB = AP = PQ = QC$ y $m\angle BAC = 60^\circ$, calcule $m\angle QPC$.

- A) 10° B) 20° C) 15°
D) 18° E) 22°

PROBLEMA N° 53

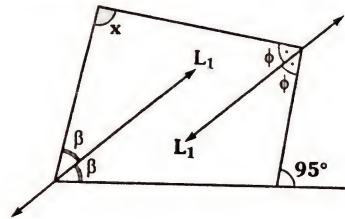
En el gráfico, $AB = AC$, calcule x .



- A) 10° B) 18° C) 15°
D) 12° E) 20°

PROBLEMA N° 54

En el gráfico, $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$, calcule x .



- A) 85° B) 95° C) 105°
D) 110° E) 125°

PROBLEMA N° 55

En el triángulo ABC, se traza la altura BH y la bisectriz interior BD.

Si $m\angle BAC - m\angle BCA = 44^\circ$.

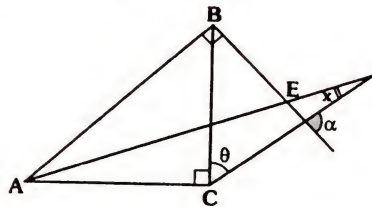
Calcule $m\angle HBD$.

- A) 22° B) 30° C) 56°
D) 38° E) 44°

PROBLEMA N° 56

En el gráfico calcule x.

Si $m\angle BAE = m\angle EAC$



- A) $2\alpha + \theta$ B) $\frac{2\alpha - \theta}{2}$ C) $\alpha + 2\theta$
D) $\frac{\alpha - \theta}{2}$ E) $\frac{\alpha + \theta}{2}$

PROBLEMA N° 57

En el triángulo ABC se ubica P en la región interior, el perímetro de la región ABC es 10 y AC toma su mayor valor entero. Calcule el valor entero de $PA + PC$.

- A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 9

PROBLEMA N° 58

En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores BE y BD ($E \in \overline{AD}$).

Si $AB = AD$, $BC = EC$ y

$$\frac{m\angle EBD}{3} = \frac{m\angle DBC}{2} = m\angle ABE$$

Calcule $m\angle EBA$

- A) 15° B) 20° C) 30°
D) 12° E) 18°

PROBLEMA N° 59

Se tiene el triángulo escaleno ABC, tal que $AC = 4$ y $BC = 7$. ¿Cuántos valores enteros puede tener AB?

- A) 7 B) 5 C) 4
D) 6 E) 8

PROBLEMA N° 60

En un triángulo ABC se ubica R y S en \overline{AC} y \overline{AB} respectivamente, si $AB = BR$, $CB = CS$, $m\angle ABR = \gamma$ y $m\angle ACS = \alpha$. Indique la alternativa correcta.

- A) $\gamma = 2\alpha$ B) $\gamma > \alpha$ C) $\alpha = 2\gamma$
D) $\gamma < \alpha$ E) $\gamma > \frac{\alpha}{2}$



PROBLEMA N° 61

SEMINARIO 2007-II

En un triángulo ABC se cumple que $m\angle A = 3m\angle C$; $AB = 3u$ y el ángulo ABC es obtuso. Calcule la longitud entera de \overline{BC} .

- A) 7 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

PROBLEMA N° 62

SEMINARIO 2007-II

En un triángulo ABC equilátero se ubica el punto D exterior al triángulo, de manera que \overline{BD} interseca a \overline{AC} . Si el ángulo ADC es obtuso, $AD = 7$ y $DC = 13$, entonces el mayor perímetro entero del triángulo ABC es:

- A) 55 B) 56 C) 57
D) 58 E) 59

PROBLEMA N° 63

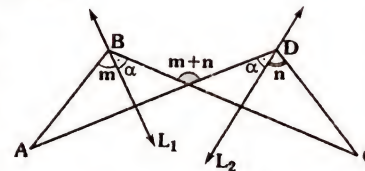
SEMINARIO 2006-II

En la figura mostrada se verifica que:

$$m\angle BAD + m\angle BCD = 60^\circ$$

La medida del ángulo agudo que forman $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$ es:

- A) 20°
B) 40°
C) 60°
D) 80°
E) 100°



PROBLEMA N° 64

SEMINARIO 2006-II

En el lado BC de un triángulo ABC se ubi-

ca el punto D y se une con el vértice A. Si: $2(m\angle CDA) = m\angle BAC + m\angle ABC$ y $CD = 6u$ entonces la longitud de \overline{AC} (en u) es:

- A) 6 B) 4 C) 8
D) 5 E) 7

PROBLEMA N° 65

SEMINARIO 2006-II

En un triángulo ABC, la bisectriz exterior del ángulo A interseca al rayo BD en el punto D.

Si: $m\angle DBC = 2(m\angle ABD)$,

$m\angle BCA = m\angle DCA$ y $m\angle BDC = 80^\circ$

entonces la $m\angle BDA$ es:

- A) 22° B) 23° C) 24°
D) 25° E) 27°

PROBLEMA N° 66

SEMINARIO 2006-II

En un triángulo isósceles ABC ($AB = BC$) se traza la bisectriz interior AD ($D \in \overline{BC}$). Si $CD = 8u$, entonces la mayor longitud entera de \overline{AD} (en u) es:

- A) 14 B) 15 C) 16
D) 18 E) 20

PROBLEMA N° 67

SEMINARIO 2006-II

En un triángulo ABC sus lados miden:

$AB = 2x - 1$, $BC = 6 - x$ y $AC = 3x - 1$

Si x es un número entero positivo, entonces el triángulo es:

- A) Isósceles B) Acutángulo
C) equilátero D) Obtusángulo
E) Rectángulo

PROBLEMA N° 68 SEMINARIO 2006-II

Los lados de un triángulo escaleno miden 4μ , 3μ y $\sqrt{x^2 - 3}$. Si $x > 0$, ¿Cuántos valores enteros x existen?

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA N° 69 SEMINARIO 2006-II

En un triángulo rectángulo ABC se traza la altura BH, en el triángulo BHC se traza la ceviana interior HQ y en el triángulo AHB se traza la bisectriz interior BM. Las prolongaciones de \overline{BM} y \overline{QH} se intersectan en P. Si $PM = 5\text{cm}$, $HC = 15\text{cm}$, $m\angle A = 72^\circ$ y $m\angle BPQ = 40,5^\circ$; entonces la longitud de \overline{BC} (en cm) es:

- A) 10 B) 15 C) 20
D) 25 E) 30

PROBLEMA N° 70 1ra P.C. 2004-I

En un triángulo ABC recto en B, se traza la altura BH. La bisectriz del ángulo ABH intersecta a \overline{AC} en el punto M. Si $AC = 18u$ y $BC = 15u$, entonces la longitud (en u) del segmento AM es:

- A) 1,5 B) 2 C) 2,5
D) 4 E) 3

PROBLEMA N° 71 1ra P.C. 2004-I

En un triángulo ABC se trazan la bisectriz interior del ángulo A y la bisectriz exterior del ángulo C, las cuales se intersectan en el punto E.

Si: $m\angle BAC = 40^\circ$ y $m\angle AEC = 45^\circ$ entonces la medida del ángulo agudo que forman las rectas BC y AE es:

- A) 60° B) 70° C) 75°
D) 80° E) 85°

PROBLEMA N° 72 1er P.C. 2005-I

En un triángulo ABC isósceles, $m\angle ABC = 100^\circ$, se trazan las cevianas \overline{BP} y \overline{AQ} ($P \in \overline{AC}$ y $Q \in \overline{BC}$) tal que: $m\angle PBC = m\angle BAQ = 30^\circ$

Entonces la $m\angle BPQ$ es:

- A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 70°

PROBLEMA N° 73 1ra C.P. 2005-II

Dado un triángulo, donde sus ángulos interiores miden $(x + 7)$, $(x - 7)$ y $(2y - x)$ ¿cuál es el menor valor entero que puede tomar y?

- A) 44° B) 46° C) 48°
D) 50° E) 51°

PROBLEMA N° 74 1ra P.C. 2006-I

Se tiene el triángulo ABC, las bisectrices interiores trazadas donde A y C se cortan en I. Si $AI = 6u$, $CI = 2u$ y AC es un número entero. Calcule AC (en u)

- A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

PROBLEMA N° 75 1ra P.C. 2006-I

En un triángulo ABC, se trazan la mediana AM y la altura BH. Si $m\angle ABH = 45^\circ$ y $m\angle BCA = 30^\circ$.

Halle $m\angle AMH$.

- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA N° 76 1ra P.C. 2006-II

Se tiene el triángulo ABC, $P \in \overline{AC}$, $Q \in \overline{BC}$, $AB = BP = PQ = QC$. Calcule el mayor valor entero que puede tomar la medida del ángulo BCA.

- A) 28° B) 29° C) 30°
D) 31° E) 32°

PROBLEMA N° 77 1ra P.C. 2006-II

Se tiene el triángulo ABC, $P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{BC}$ y $R \in \overline{QC}$. Si $m\angle BCP = 30^\circ$, $m\angle BAQ = m\angle CAR = 20^\circ$; $m\angle QAR = 40^\circ$ y $m\angle PCA = 50^\circ$

Calcule $m\angle PQA$.

- A) 25° B) 30° C) 35°
D) 40° E) 45°

PROBLEMA N° 78 1ra P.C. 2007-I

Se tiene el triángulo ABC, en \overline{BC} se ubica P, en \overline{PC} se ubica Q y en \overline{AC} se ubica R, $m\angle PAQ = m\angle RPQ = 30^\circ$, $m\angle BAP = 20^\circ$, $m\angle QAC = 10^\circ$ y $m\angle APR = 70^\circ$.

Calcule $m\angle AQR$

- A) 15° B) 20° C) 25°
D) 30° E) 35°

PROBLEMA N° 79 1er EXÁMEN PARCIAL 2002-I

En un triángulo escaleno ABC, las bisectrices interiores trazadas desde A y C se intersectan en I. Si $AI = 3$ e $IC = 4$.

Halle la longitud de \overline{AC} si se sabe que es un número entero.

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA N° 80 1er EXÁMEN PARCIAL 2005-I

En un triángulo escaleno ABC, donde $AB < BC$, se traza la bisectriz interior BD, entonces podemos afirmar que:

- A) $m\angle A - m\angle C = m\angle BDA - m\angle BDC$
B) $m\angle A + m\angle C = m\angle BDC + m\angle BDA$
C) $m\angle A + m\angle C = m\angle BDC - m\angle BDA$
D) $m\angle A - m\angle C = m\angle BDC + m\angle BDA$
E) $m\angle A - m\angle C = m\angle BDC - m\angle BDA$

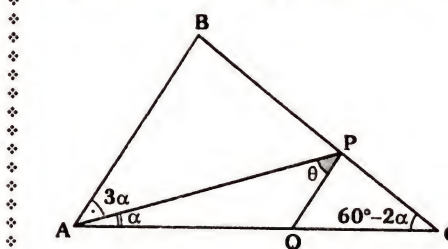
PROBLEMA N° 81 Texto CEPRE-UNI 2004

Dado un triángulo ABC y un punto P exterior tal que $\overline{PC} \cap \overline{AB} \neq \emptyset$. Si $PA = 5u$; $PB = 4u$ y $BC + AC = 11u$. Calcule el máximo valor entero de la longitud de \overline{PC} (en u).

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

PROBLEMA N° 82 TEXTO CEPRE UNI 2004

En el gráfico, $AB = AQ$, calcule θ

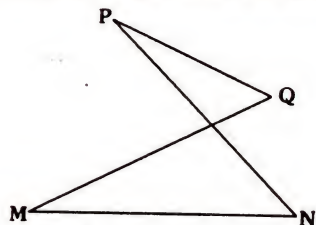


- A) 15° B) 30° C) 45°
D) $30^\circ - \alpha$ E) $15^\circ + \alpha$

PROBLEMA N° 83 TEXTO CEPRE UNI 2004

En la figura $MQ = 12u$; $PN = 16u$ y $MN = 8u$. Halle el mayor valor entero de PQ .

- A) 4u
B) 11u
C) 15u
D) 19u
E) 21u



PROBLEMA N° 84 TEXTO CEPRE UNI 2004

En un triángulo ABC; $AB = 3u$ y $BC = 10u$, siendo AFC un triángulo equilátero. Calcule el mayor valor entero del perímetro del triángulo AFC.

- A) 22u B) 24u C) 36u
D) 39u E) 38u

PROBLEMA N° 85 1er SEMINARIO 99-I

En un triángulo ABC, $m\angle B = 60^\circ$, $P \in BC$; $Q \in AC$ y $PB = AQ = AB$ y $m\angle QAB = m\angle AQP$. Calcule $m\angle QPC$.

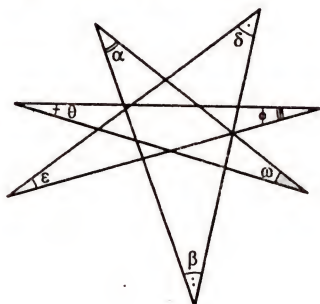
- A) 40° B) 50° C) 60°
D) 45° E) 35°

PROBLEMA N° 86 1er SEMINARIO 99-I

En la figura, calcule :

$$\alpha + \beta + \delta + \epsilon + \phi + \theta + \omega$$

- A) 90°
B) 135°
C) 180°
D) 225°
E) 270°



PROBLEMA N° 87 1er SEMINARIO 99-I

ABC es un triángulo, E es un punto exterior relativo a \overline{AC} , tal que $AE = 8m$;

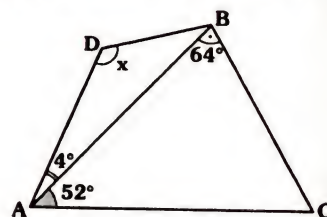
$$\begin{aligned} m\angle AEB &= m\angle BEC; \\ m\angle EBC &= m\angle BCA - m\angle BEC \text{ y} \\ m\angle BCA + m\angle BEC &= 90^\circ \end{aligned}$$

Calcule AB en metros.

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

PROBLEMA N° 88 1er SEMINARIO 99-I

En la figura $AD = BC$, calcule x



- A) 100° B) 101° C) 120°
D) 121° E) 150°

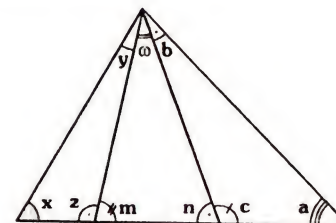
PROBLEMA N° 89 1er SEMINARIO 99-I

Dado el triángulo rectángulo ABC, $P \in \overline{AC}$, $AP < PC$, $AC = 2(BP)$ y $m\angle ABP = \theta$. Calcule $m\angle C$

- A) $30^\circ + \frac{\theta}{3}$ B) $30^\circ + \frac{\theta}{2}$
C) $30^\circ - \frac{\theta}{2}$ D) $45^\circ + \frac{\theta}{3}$
E) $45^\circ - \frac{\theta}{2}$

PROBLEMA N° 90 1er SEMINARIO 98-II

En el gráfico ¿cuál de las siguientes relaciones es correcta?



- A) $x + z = a + b$
B) $y + z = a + b$
C) $m + x = w + n$
D) $x + z + n = w + c + m$
E) $x + y + n = a + b + m$

PROBLEMA N° 91 1er SEMINARIO 98-II

En un triángulo rectángulo ABC ($m\angle B = 90^\circ$) sobre \overline{AC} se toma un punto D ($AD < DC$). Si $AC = 10$; $BD = 5$ y $m\angle C = 38^\circ$. Calcule $m\angle ABD$.

- A) 10° B) 14° C) 16°
D) 20° E) 24°

PROBLEMA N° 92 1er SEMINARIO 98-II

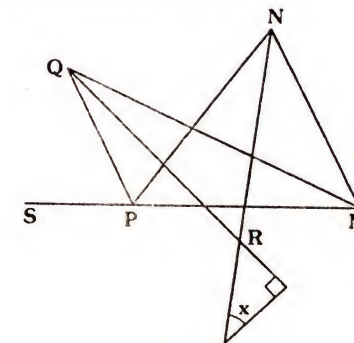
En un triángulo ABC, $AB = k$ y $BC = k + 5$, por B se traza una paralela a \overline{AC} que corta a la bisectriz interior de A en P y a la bisectriz exterior de C en Q. Calcule PQ.

- A) 10 B) $\frac{5}{2}$ C) 5
D) $\frac{k}{2}$ E) $\frac{(2+k)}{2}$

PROBLEMA N° 93 1er SEMINARIO 98-II

En el gráfico, $2(m\angle NMP) + m\angle MNP = \phi$. Si \overline{MQ} , \overline{QR} , \overline{NR} y \overline{PQ} son bisectrices

de los ángulos NMP, PQM, MNP y SPN respectivamente. Calcule x.



- A) $90^\circ - \frac{\phi}{4}$ B) $90^\circ - \frac{\phi}{3}$ C) $90^\circ - \frac{\phi}{2}$
D) $90^\circ - \phi$ E) $90^\circ - \frac{\phi}{5}$

PROBLEMA N° 94 1er SEMINARIO 98-I

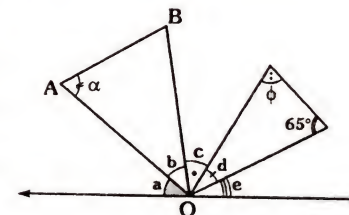
En un triángulo ABC acutángulo, la medida del ángulo interior en A excede en 28° al ángulo interior en B. Calcule la medida del ángulo entre la bisectriz exterior en C y la altura CH.

- A) 98° B) 100° C) 102°
D) 104° E) 106°

PROBLEMA N° 95 1er SEMINARIO 98-I

En el gráfico a, b, c, d y e son números pares consecutivos en orden creciente. Si $OA = OB$, calcule $\alpha + \phi$.

- A) 110°
B) 120°
C) 150°
D) 160°
E) 180°



PROBLEMA N° 96 1er SEMINARIO 98-I

En un triángulo ABC, obtuso en B se cumple que $m\angle A = 2(m\angle C)$ y $AB = 4u$. Calcule el valor entero de BC.

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

PROBLEMA N° 97 1er SEMINARIO 97-I

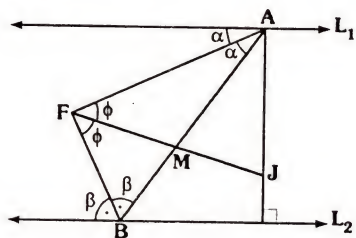
En un triángulo isósceles ABC ($AB = BC$), se construye exteriormente el triángulo BCD ($BD = 4$ y $CD = 3$).

Si $BC > AC > CD$ y el ángulo CDB es obtuso. Si las longitudes de los lados del triángulo ABC son números enteros. Calcule el máximo valor entero del perímetro de ABDC.

- A) 16 B) 15 C) 17
D) 18 E) 14

PROBLEMA N° 98 1er SEMINARIO 97-I

En el gráfico $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$, $AM = a$ y $BM = b$, calcule AJ.



- A) $a - b$ B) $\frac{a+b}{2}$ C) a
D) $a + \frac{b}{2}$ E) $\frac{2}{3}(a+b)$

PROBLEMA N° 99 1er SEMINARIO 97-I

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores BD y CF luego se

trazan los rayos \overline{FP} y \overline{DP} , tal que:

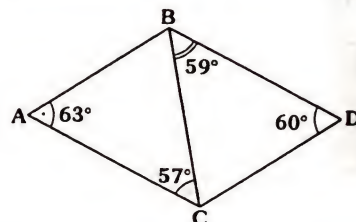
$$\frac{m\angle BFP}{m\angle PFC} = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad \frac{m\angle CDP}{m\angle PDB} = \frac{3}{2}$$

Si: $m\angle BAC = \theta$. Calcule: $m\angle FPD$

- A) $60^\circ - \frac{\theta}{10}$ B) $54^\circ - \frac{\theta}{10}$
C) $36^\circ - \frac{\theta}{10}$ D) $18^\circ - \frac{2\theta}{5}$
E) $90^\circ - \frac{\theta}{10}$

PROBLEMA N° 100 1er SEMINARIO 97-I

Del gráfico, indique que segmento tiene mayor longitud.

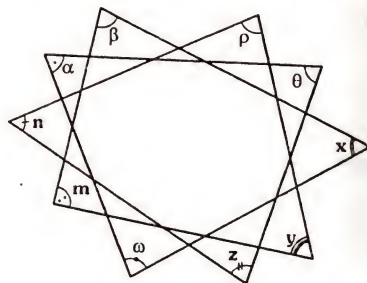


- A) \overline{BC} B) \overline{BD} C) \overline{CD}
D) \overline{AB} E) \overline{AC}

PROBLEMA N° 101 1er SEMINARIO 97-I

Del gráfico, calcule:

$$\alpha + \beta + \rho + \theta + x + y + z + \omega + m + n$$



- A) 180° B) 360° C) 270°
D) 540° E) 720°

PROBLEMA N° 102 1er SEMINARIO 97-I

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores AF y BD, por D se traza una paralela a \overline{AB} que corta a \overline{FC} en H y a \overline{AF} en E. Si $BH = 8$ y $AD = 10$. Calcule EH.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA N° 103 1er SEMINARIO 2003-II

En un triángulo ABC, se cumple $m\angle BAC = 2(m\angle BCA)$; se traza la bisectriz interior AM tal que $AC = AB + MC$.

Calcule $m\angle BAC$.

- A) $\frac{180^\circ}{7}$ B) $\frac{90^\circ}{7}$ C) $\frac{150^\circ}{7}$
D) $\frac{270^\circ}{7}$ E) $\frac{360^\circ}{7}$

PROBLEMA N° 104 1er SEMINARIO 2003-II

En la recta que contiene al vértice C de un triángulo equilátero ABC se ubican los puntos D y E tal que estos son exteriores a los lados \overline{AC} y \overline{BC} respectivamente.

Si $m\angle BCE - m\angle DAC = 60^\circ$ y $AD = CE$. Entonces la medida del ángulo BED, es:

- A) 45° B) 90° C) 60°
D) 120° E) 30°

PROBLEMA N° 105 1er SEMINARIO 2001-II

En un triángulo isósceles ABC ($AB = BC$), la bisectriz exterior del ángulo C y la bisectriz interior del ángulo A, se cortan

en E, si $AB = 10$, halle el mayor valor entero que puede tomar AE.

- A) 18 B) 19 C) 20
D) 17 E) 16

PROBLEMA N° 106 1er SEMINARIO 2001-II

En un triángulo rectángulo ABC, se traza la altura BH; las bisectrices de los ángulos ABH y HBC intersecan a \overline{AC} en los puntos M y N respectivamente. Si $AB = 8$ y $BC = 15$, calcule MN.

- A) 2 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

PROBLEMA N° 107 1er SEMINARIO 2001-II

En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior desde C y la bisectriz exterior desde A, intersecándose en el punto M, por donde se traza una paralela a \overline{AC} intersectando a la bisectriz interior desde A en el punto N y a los lados AB y BC en los puntos P y Q respectivamente. Si $AP = 5$ y $QC = 7$. Halle MN.

- A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

PROBLEMA N° 108 1er SEMINARIO 2001-II

¿Cuántos triángulos existen de lados enteros y perímetro $26u$?

- A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 10

PROBLEMA N° 109 1er SEMINARIO 2001-II

En el triángulo ABC ($BA = AC$), se trazan la altura AD y la ceviana CM ($M \in \overline{AB}$) tal que $m\angle DAC = \alpha$, $m\angle BCM = 2\alpha$. Se ubica N en \overline{AD} tal que $CN = BC$. Halle $m\angle MCN$.

- A) $90^\circ - 3\alpha$ B) $45^\circ - 3\alpha$
C) $60^\circ - 2\alpha$ D) $60^\circ - 3\alpha$
E) $75^\circ - 2\alpha$

PROBLEMA N° 110 1er SEMINARIO 2001-II

En un triángulo rectángulo ABC, sobre la prolongación de \overline{BC} se ubica D y por dicho punto se traza una recta secante que interseca a \overline{AC} en E y a \overline{AB} en F. Si $AF=FE=ED$ y $BC=CE$. Halle $m\angle ECD$

- A) 110° B) 108° C) 112°
D) 116° E) 120°

PROBLEMA N° 111 1er SEMINARIO 2001-I

En un triángulo ABC ($m\angle B = 110^\circ$), las bisectrices de los ángulos exteriores determinados en A y C se intersecan, con \overline{CB} y \overline{AB} en P y Q respectivamente. Calcule la medida del ángulo agudo determinado por las bisectrices de los ángulos APB y CQB.

- A) 75° B) 55° C) $82^\circ 30'$
D) $72^\circ 30'$ E) 70°

PROBLEMA N° 112 1er SEMINARIO 2001-I

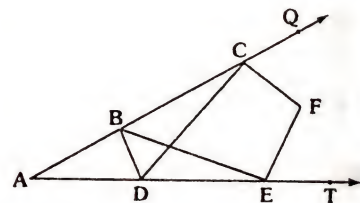
En un triángulo ABC se ubica M punto interior tal que $AC=BM$; $m\angle MAC = 48^\circ$; $m\angle MCA = 18^\circ$ y $m\angle AMB = 120^\circ$.

Calcule $m\angle MCB$.

- A) 18° B) 20° C) 24°
D) 30° E) 22°

PROBLEMA N° 113 1er SEMINARIO 2001-I

En el gráfico \overline{DC} , \overline{BE} , \overline{CF} y \overline{EF} son bisectrices de los ángulos BDE, DBC, DCQ y BET respectivamente. Si $m\angle CAE = \theta$, calcule $m\angle CFE$.



- A) $180^\circ - \frac{\theta}{4}$ B) $90^\circ + \frac{\theta}{4}$
C) $135^\circ - \frac{\theta}{4}$ D) $125^\circ - \frac{\theta}{4}$
E) $150^\circ - \frac{\theta}{4}$

PROBLEMA N° 114 1er SEMINARIO 2001-I

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores \overline{AD} y \overline{BE} , por D se traza una paralela a \overline{AB} que interseca a la prolongación de \overline{BE} en F y a \overline{AC} en G. Si $AG=m$ y $BD=n$ ($n > m$). Halle FG

- A) $n - m$ B) $\frac{m+n}{2}$ C) $2m - n$
D) $\frac{2m+n}{3}$ E) $\frac{2n-m}{3}$

PROBLEMA N° 115 1er SEMINARIO 2001-I

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores \overline{AD} y \overline{BE} . Si $m\angle ACB = \theta$. Calcule la medida del ángulo entre las bisectrices de los ángulos ADC y BEC.

- A) $45^\circ + \frac{\theta}{4}$ B) $45^\circ - \frac{\theta}{4}$ C) $60^\circ - \frac{\theta}{4}$
D) $35^\circ - \frac{\theta}{4}$ E) $35^\circ + \frac{\theta}{4}$

PROBLEMA N° 116 1er SEMINARIO 2001-I

En el interior de un triángulo rectángulo

ABC (recto en B) se ubica Q, tal que:

$$\overline{AQ} \cap \overline{BC} = \{E\} ; \overline{CQ} \cap \overline{AB} = \{F\}$$

Si $AQ + QC = 10$ y $QE + QF = 4$. ¿Cuántos valores enteros tiene AC?

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA N° 117 1er SEMINARIO 2001-I

Dado un triángulo ABC, en \overline{AB} y \overline{AC} se ubican P y Q de tal modo que:

$$AP = PQ = QC, \quad BC = BQ \quad \text{y} \quad m\angle ACB = 2(m\angle BAC).$$

Halle $m\angle PQB$

- A) 30° B) 60° C) 36°
D) 72° E) 45°

PROBLEMA N° 118 1er SEMINARIO 2001-I

En un triángulo ABC, donde:

$$m\angle BAC = 2(m\angle ACB)$$

Se traza la bisectriz interior BD, si $2(BC) = 5(AD) = 10a$. Calcule AB.

- A) $2a$ B) $\frac{3}{2}a$ C) $3a$
D) $\frac{5}{2}a$ E) $\frac{8}{3}a$

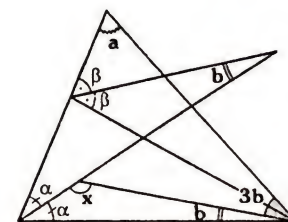
PROBLEMA N° 119 1er SEMINARIO 99-II

En un triángulo obtusángulo ABC se traza la ceviana interior BD. Si $AB=AD=BC$, calcule el menor valor entero de $m\angle DBC$

- A) 40° B) 42° C) 44°
D) 23° E) 45°

PROBLEMA N° 120 1er SEMINARIO 2005-II

En el gráfico $a + 2b = 100^\circ$, calcule x.



- A) 140°
B) 130°
C) 110°
D) 120°
E) 135°

PROBLEMA N° 121 1er SEMINARIO 2005-II

En un triángulo ABD se trazan las cevianas interiores AE y BC, tal que $AB=BE=AC$; $CE=ED$ y $m\angle BAC = 60^\circ$. Calcule $m\angle EAC$.

- A) 8° B) 12° C) 9°
D) 10° E) 15°

PROBLEMA N° 122 1er SEMINARIO 2005-II

En un triángulo rectángulo ABC isósceles ($m\angle B = 90^\circ$), en su interior se ubica Q, tal que $m\angle BAQ = 2x$; $m\angle ACQ = x$ y $m\angle QBC = 3x$. Calcule x

- A) 10° B) 18° C) 12°
D) 15° E) 20°

PROBLEMA N° 123 1er SEMINARIO 2005-II

En un triángulo ABD se ubica Q en la región exterior relativo a \overline{BD} , tal que $AD=DQ$; $m\angle BAQ = 30^\circ$; $m\angle ABD = 18^\circ$ y $m\angle BDQ = 42^\circ$. Calcule $m\angle DBQ$

- A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA N° 124 1er SEMINARIO 2005-II

El número de rectas distintas que contienen a las alturas, medianas y bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo isósceles no equilátero, es:

- A) 9 B) 7 C) 6
D) 5 E) 3

PROBLEMA N° 125 1er SEMINARIO 2005-II

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores AE, BD y CG intersecándose en I. Si $m\angle AID = 78^\circ$ y $m\angle DIC = 58^\circ$.

Calcule $m\angle BAC - m\angle BCA$

- A) 40° B) 38° C) 44°
D) 25° E) 20°

PROBLEMA N° 126 1er SEMINARIO 2005-II

En un triángulo escaleno sus lados miden $4u$, $3u$ y $\sqrt{x^2 - 2u}$. ¿Cuántos valores enteros tiene x ?

- A) 6 B) 7 C) 12
D) 8 E) 9

PROBLEMA N° 127 1er SEMINARIO 2005-II

¿Cuál es el número de triángulos escalenos, tal que las longitudes de sus lados son números enteros y su perímetro es menor que 13?

- A) 3 B) 5 C) 7
D) 4 E) 8

PROBLEMA N° 128 1er SEMINARIO 2006-I

En un triángulo isósceles ABC ($AB = AC$), $m\angle A = 80^\circ$, en el interior del triángulo se ubica M, tal que $m\angle MBC = 30^\circ$ y $m\angle MCB = 10^\circ$. Calcule $m\angle AMC$.

- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 70° E) 75°

PROBLEMA N° 129 1er SEMINARIO 2006-I

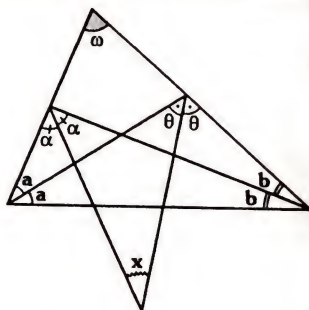
En el triángulo ABC ($AB = BC$), \overline{AD} es bisectriz interior y en el triángulo ADC se

traza la bisectriz interior \overline{DM} y \overline{DN} es bisectriz exterior con N en \overline{AC} . Si $AD = 5u$ calcule MN(en u).

- A) 10 B) 12 C) 8
D) 9 E) 11

PROBLEMA N° 130 1er SEMINARIO 2006-I

Del gráfico, calcule x en función de ω .



- A) $15^\circ - \frac{\omega}{3}$ B) $45^\circ - \frac{\omega}{5}$ C) $45^\circ - \frac{\omega}{4}$
D) $45^\circ + \frac{\omega}{4}$ E) $45^\circ - \omega$

PROBLEMA N° 131 1er SEMINARIO 2006-I

Sobre el lado AB de un triángulo ABC ($AB = BC$) se construye un triángulo equilátero ABE, de modo que los puntos E y C se encuentran en el mismo semiplano con respecto a \overline{AB} . Si $m\angle ABC = 20^\circ$ entonces, $m\angle AEC$ es:

- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA N° 132 1er SEMINARIO 2006-I

En un triángulo ABC, se cumple:

$m\angle BAC = 3(m\angle BCA)$ y $BC = 15$
Halle el menor valor entero de AB.

- A) 9 B) 5 C) 8
D) 6 E) 7

PROBLEMA N° 133 1er SEMINARIO 2006-I

En un triángulo PQR, se trazan las bisectrices interiores QE y RF, se ubica S

exterior y relativo a \overline{QR} tal que:

$$\begin{aligned} m\angle QFS &= 3(m\angle SFR) ; \\ m\angle RES &= 3(m\angle QES) \text{ y} \\ m\angle QPR + m\angle FSE &= 180^\circ \end{aligned}$$

Calcule $m\angle QPR$

- A) 100° B) 110° C) 90°
D) 80° E) 60°

PROBLEMA N° 134 1er SEMINARIO 2006-I

En un triángulo ABC, $AB = 3$; $AC = 11$ y $m\angle ABC > 90^\circ$. Halle BC si es el mayor número entero posible.

- A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

PROBLEMA N° 135 1er SEMINARIO 2006-I

En el triángulo ABC ($AB = BC$), $D \in \overline{AB}$ y \overline{DE} es perpendicular a \overline{AC} (E en \overline{AC}). La prolongación de \overline{DE} interseca al rayo CX, que forma con \overline{CA} un ángulo de igual medida que $\angle BCA$, en el punto F. Si $AD = a$ y $CF = b$. Calcule BD

- A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{2b-a}{2}$ C) $\frac{2a-b}{2}$
D) $\frac{b-a}{2}$ E) $b - 2a$

PROBLEMA N° 136 1er SEMINARIO 2006-I

En el interior de un triángulo ABC se

ubica M tal que $AB = AM = MC$
 $m\angle BCM = 3\alpha$; $m\angle CAM = 2\alpha$
 $m\angle ABC = 13\alpha$. Calcule α .

- A) 5° B) 6° C) 10°
D) 12° E) 15°

PROBLEMA N° 137 1er SEMINARIO 2006-I

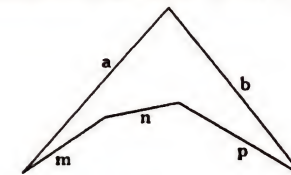
Demostrar que en un triángulo, la medida del ángulo entre una altura con la bisectriz interior trazadas desde el mismo vértice es igual a la semidiferencia de medidas de los otros dos ángulos interiores del triángulo.

PROBLEMA N° 138 1er SEMINARIO 2007-I

Demostrar que en todo triángulo rectángulo, la hipotenusa siempre es mayor que cualquier cateto.

PROBLEMA N° 139 1er SEMINARIO 2007-II

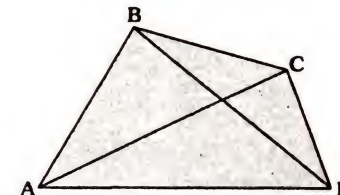
En el gráfico, demostrar: $m + n + p < a + t$



PROBLEMA N° 140

En el gráfico "p" es el semiperímetro de la región ABCD, demostrar:

$$p < AC + BD < 2p$$

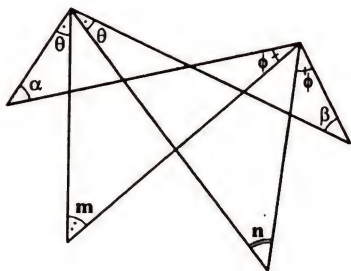


Problemas Propuestos

Ciclo Semestral

PROBLEMA N° 141

En el gráfico, $m + n = 120^\circ$. calcule $\alpha + \beta$



- A) 60° B) 100° C) 120°
D) 150° E) 90°

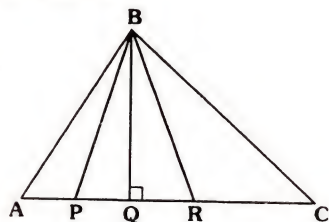
PROBLEMA N° 142

En el gráfico, $AP=3$, $PR=10$, $PC=12$,

$$m\angle BAC = 2(m\angle QBR) \text{ y}$$

$$m\angle ACB = 2(m\angle PBQ).$$

Calcule $AB+BC$

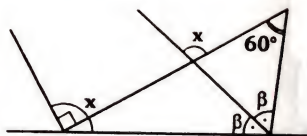


- A) 20 B) 25 C) 55
D) 32 E) 30

PROBLEMA N° 143

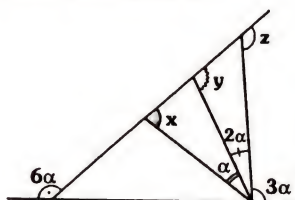
Del gráfico, calcule x .

- A) 150°
B) 120°
C) 135°
D) 110°
E) 140°



PROBLEMA N° 144

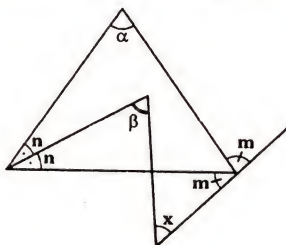
En el gráfico, $x + y + z > 270^\circ$, calcule el mayor valor entero de α .



- A) 21° B) 24° C) 29°
D) 27° E) 25°

PROBLEMA N° 145

En el gráfico, $2\beta - \alpha = 70^\circ$, calcule x .



- A) 35° B) 70° C) 55°
D) 25° E) 45°

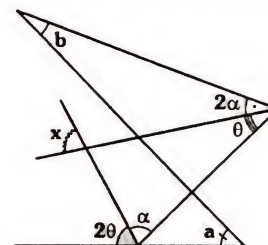
PROBLEMA N° 146

En la región interior de un triángulo ABC, se ubica P, tal que $PB=4$ y $PC=7$. Calcule el menor valor entero del perímetro de la región ABC.

- A) 10 B) 11 C) 15
D) 17 E) 18

PROBLEMA N° 147

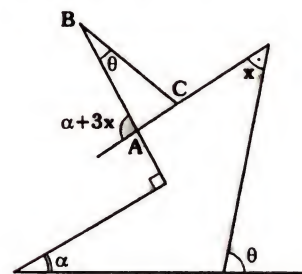
En el gráfico, $a - b = 60^\circ$. Calcule x .



- A) 50° B) 120° C) 80°
D) 100° E) 130°

PROBLEMA N° 148

En el gráfico, $AB=BC$. Calcule x .



- A) 50° B) 45° C) 40°
D) 35° E) 30°

PROBLEMA N° 149

En un triángulo las distancias de un punto interior a sus vértices son 3, 4 y 8. Calcule el mayor valor entero del perímetro.

- A) 23 B) 24 C) 25
D) 29 E) 20

PROBLEMA N° 150

En el triángulo ABC ($AB=BC$), se ubica G en \overline{AB} y F en \overline{BC} tal que el triángulo FGC es equilátero. Si $m\angle ACG = \alpha$.

Calcule $m\angle FGB$.

- A) α B) $60^\circ - \alpha$ C) $60^\circ + \alpha$
D) 2α E) $90^\circ - \alpha$

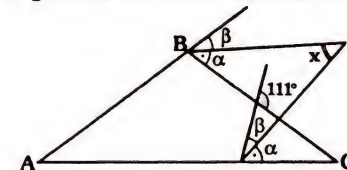
PROBLEMA N° 151

En los lados AC y BC del triángulo ABC se ubican los puntos E y F respectivamente. De modo que $AB=AF$, $EB=BC$ y $m\angle ABE = m\angle EBC = 4(m\angle FAC)$. Calcule $m\angle BAF$

- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 15° E) 16°

PROBLEMA N° 152

En el gráfico, $AB=BC$. Calcule x .



- A) 35° B) 31° C) 36°
D) 37° E) 30°

PROBLEMA N° 153

En el triángulo ABC en las prolongacio-

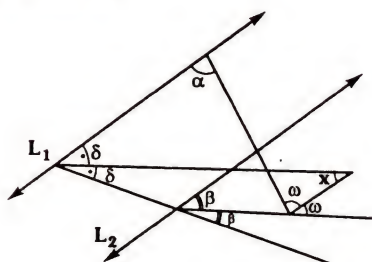
nes de \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} se ubican los puntos P, Q y R respectivamente, en PQ se ubica M tal que $\overline{MR} \perp \overline{AC}$, $PB = BQ$ y $m\angle PAR - m\angle ACB = 32^\circ$.

Calcule $m\angle RMQ$

- A) 32° B) 48° C) 24°
D) 16° E) 29°

PROBLEMA N° 154

En el gráfico, $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$. Calcule x, en función de α y β .



- A) $\alpha + \beta$ B) $\frac{\alpha - \beta}{2}$ C) $2\alpha - \beta$
D) $\frac{\alpha + \beta}{2}$ E) $2\alpha + \beta$

PROBLEMA N° 155

En la región exterior relativa a \overline{BC} del triángulo equilátero ABC se ubica el punto M, tal que:

$$\overline{AM} \cap \overline{BC} = \{N\} \text{ y } MN = MC = AB$$

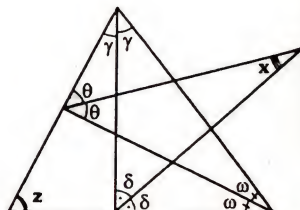
Calcule $m\angle CBM$.

- A) 40° B) 30° C) 50°
D) 60° E) 45°

PROBLEMA N° 156

En el gráfico, el triángulo ABC es acutángulo, si z toma su mayor valor en-

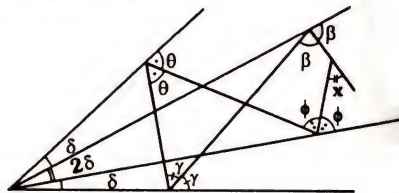
tero par, calcule x.



- A) 44° B) 46° C) 23°
D) 78° E) 88°

PROBLEMA N° 157

Del gráfico, calcule x.



- A) 30° B) 45° C) 36°
D) 60° E) 72°

PROBLEMA N° 158

Se tiene un triángulo ABD, se ubica C en la región exterior relativa a \overline{BD} , tal que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $AC = 20$ y $BD = 10$. Calcule la diferencia del máximo y mínimo valor entero de $AD + BC$.

- A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

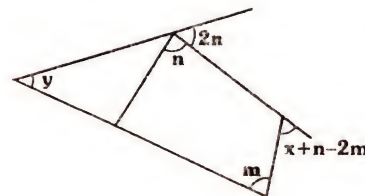
PROBLEMA N° 159

Indique el número de triángulos escalenos cuyo perímetro sea 13 y las longitudes de sus lados sean enteras.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA N° 160

En el gráfico, $m - n = 10^\circ$. Calcule $x - y$.



- A) 40° B) 51° C) 30°
D) 91° E) 59°

PROBLEMA N° 161

En el triángulo ABC el punto I es la intersección de las bisectrices interiores desde A y B. Por I se traza una recta perpendicular a \overline{CI} , la cual interseca a la bisectriz exterior trazada desde A en el punto M. La bisectriz exterior del ángulo de vértice M del triángulo MIA interseca a la prolongación de \overline{IC} en T, tal que:

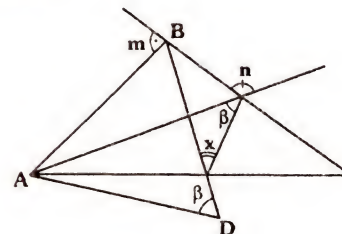
$$m\angle ABC = 2(m\angle ITM)$$

Calcule $m\angle ABC$.

- A) 60° B) 40° C) 90°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA N° 162

En el gráfico, $AB = AD$ y $m + n = 220^\circ$. Calcule x.



- A) 30° B) 40° C) 50°
D) 35° E) 70°

PROBLEMA N° 163

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BD, luego en el triángulo BDC se traza la ceviana interior DE tal que:

$$AB = BD = BE \text{ y}$$

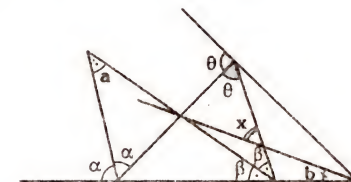
$$m\angle BAD = 3(m\angle AED)$$

Calcule $m\angle AED$

- A) 16° B) 15° C) 18°
D) $22^\circ 30'$ E) $26^\circ 30'$

PROBLEMA N° 164

En el gráfico, $4a - b = 160^\circ$. Calcule x.



- A) 10° B) 18° C) 20°
D) 30° E) 40°

PROBLEMA N° 165

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AM en cuya prolongación se ubica N, si $m\angle ABC = 40^\circ$; $m\angle ANC = 35^\circ$ y $m\angle BAC = m\angle AMC$.

Calcule $m\angle ACN$

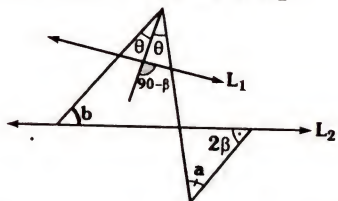
- A) 105° B) 106° C) 108°
D) 100° E) 95°

PROBLEMA N° 166

En el gráfico, $CP = CQ$. Calcule x.

PROBLEMA N° 181

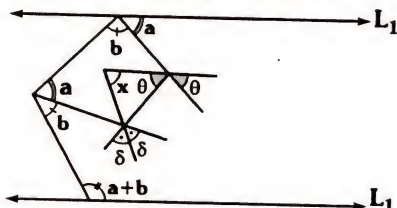
En el gráfico, $a + b = 80^\circ$. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$.



- A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 55°

PROBLEMA N° 182

En el gráfico, $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$, calcule x.



- A) 30° B) 45° C) 60°
D) $67,5^\circ$ E) $52,5^\circ$

PROBLEMA N° 183

En un triángulo APQ se traza una recta que corta a \overline{AP} , \overline{PQ} y a la prolongación de \overline{AQ} en B, M y C respectivamente. Si $m\angle PAQ = 30^\circ$ y $AB = MC = QC$. Calcule la diferencia del mayor y menor valor entero de $m\angle APQ$.

- A) 11° B) 12° C) 13°
D) 14° E) 15°

PROBLEMA N° 184

Los lados de un triángulo tienen por longitudes $2a-1$, $6-a$ y $3a-1$. Si $a \in \mathbb{Z}^+$.

Calcule la medida del mayor ángulo interior.

- A) 60° B) 75° C) 90°
D) 120° E) 127°

PROBLEMA N° 185

En un triángulo ABC se ubica P en la región exterior relativa a \overline{BC} , tal que el perímetro de la región BPC es 12. Calcule el mayor valor entero de AC, si AB y BC son enteros y $m\angle BCA < m\angle BAC$.

- A) 11 B) 9 C) 8
D) 6 E) 7

PROBLEMA N° 186

El perímetro de una región triangular es 24. Si el triángulo es rectángulo, calcule el menor valor entero de la longitud de la hipotenusa.

- A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

PROBLEMA N° 187

Se tiene un triángulo obtusángulo, si los lados menores miden 10 y 2. ¿Cuántos valores enteros toma el mayor lado?

- A) 1 B) 0 C) 2
D) 3 E) 4

PROBLEMA N° 188

En un triángulo ABC, en \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} se ubican M, N y L respectivamente. Luego se ubica P, Q y R en \overline{MN} , \overline{NL} y \overline{ML} respectivamente si $PQ=5$, $QR=6$ y $PR=7$, calcule el menor valor entero del perímetro de la región ABC.

- A) 14 B) 15 C) 18
D) 19 E) 20

PROBLEMA N° 189

En un triángulo isósceles ABC ($AB = BC$), en la región exterior relativa a BC se ubica P, tal que $AB = BP$ y $m\angle BAP = 40^\circ$. En la prolongación de \overline{AC} se ubica M. Calcule $m\angle PCM$.

- A) 30° B) 35° C) 40°
D) 45° E) 50°

PROBLEMA N° 190

En la región exterior relativa a \overline{AB} del triángulo ABC se ubica P, tal que $PB = BC$, $m\angle ACB = 2(m\angle BAC)$ y $m\angle BAC + m\angle PBA = 60^\circ$.

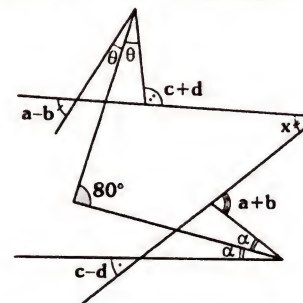
Calcule $m\angle PAB$.

- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 60°

PROBLEMA N° 191

En el gráfico, $a + c = 135^\circ$, calcule x.

- A) 35°
B) 55°
C) 45°
D) 50°
E) 65°



PROBLEMA N° 192

En un triángulo ABC se ubica E en la prolongación de \overline{BC} y D en \overline{AE} tal que $AC = CE$.

Si $m\angle ACB = 3(m\angle DCE)$ y $ED = 4$. Calcule el mayor valor entero de CD.

- A) 8 B) 9 C) 3
D) 5 E) 7

PROBLEMA N° 193

En el triángulo ABC de base AC, se traza la recta secante \overline{MN} que interseca a \overline{AB} , \overline{BC} y a la prolongación de \overline{AC} en P, Q y R respectivamente (P, Q y R en \overline{MN}). Si $m\angle BPM = b$ y $m\angle CQR = a$.

Calcule $m\angle QRC$.

- A) $90^\circ - (a + b)$ B) $\frac{a+b}{2}$
C) $90^\circ - \frac{(a+b)}{2}$ D) $\frac{b-a}{2}$
E) $45^\circ - \frac{(a+b)}{4}$

PROBLEMA N° 194

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y CN de modo:

$$m\angle BNC = m\angle AMC$$

y la medida del menor ángulo determinado por las bisectrices de los ángulos ANC y AMC es igual a la medida del ángulo ABC. Calcule $m\angle ABC$.

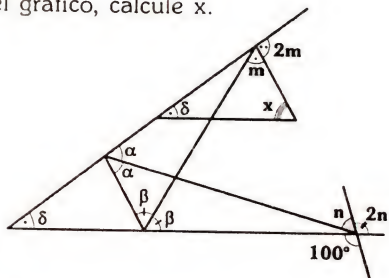
- A) 45° B) 60° C) 90°
D) 30° E) 72°

PROBLEMA N° 195

En el triángulo acutángulo ABC se trazan las bisectrices interiores BF y CE. Si $m\angle BAC$ toma su mayor valor entero par, calcule la medida del ángulo que

PROBLEMA N° 206

Del gráfico, calcule x .



- A) 50° B) 60° C) 70°
D) 80° E) 100°

PROBLEMA N° 207

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AP tal que:

$$m\angle PAC = \frac{m\angle BAP}{3} = \frac{m\angle PCA}{2} \quad y$$

$$AC = BP + PC$$

Calcule $m\angle ABC$.

- A) 72° B) 60° C) 78°
D) 36° E) 45°

PROBLEMA N° 208

En el triángulo ABC, se ubican P, Q y R en \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} respectivamente. Si $m\angle PRQ = 60^\circ$, $AR = RP$ y $RQ = RC$.

Calcule la medida del ángulo entre la bisectriz interior trazada de P y la exterior trazada de Q para el triángulo PBQ.

- A) 30° B) 20° C) 15°
D) 60° E) 45°

PROBLEMA N° 209

Se tiene el triángulo isósceles ABC (\overline{AC} : base), se ubican M y N en \overline{AB} y \overline{BC} res-

pectivamente.

Si: $AM = MN = AC$ y $m\angle AMN = 60^\circ$

Calcule: $m\angle ACB - m\angle ABC$

- A) 30° B) 60° C) 45°
D) 36° E) 72°

PROBLEMA N° 210

En el triángulo ABC se ubica P exterior y relativo a \overline{BC} y en la prolongación de \overline{PC} el punto Q tal que $m\angle BCP = m\angle ACQ$ y $2(m\angle APC) = m\angle ABC$. Luego se ubica el punto R en \overline{AC} tal que:

$m\angle ABR = m\angle ACB$ y $m\angle RBC = 40^\circ$

Calcule la medida del ángulo entre \overline{AP} y una recta perpendicular a \overline{BR} .

- A) 10° B) 18° C) 20°
D) $22,5^\circ$ E) 30°

PROBLEMA N° 211

En el triángulo ABC ($AB = BC$), se cumple que $m\angle ABC$ toma su mayor valor entero. Calcule la medida del ángulo entre la altura relativa a \overline{AC} y la bisectriz exterior AM (M en la prolongación de \overline{BC}).

- A) $30^\circ 15'$ B) 45° C) 30°
D) 15° E) $22^\circ 30'$

PROBLEMA N° 212

En el triángulo isósceles ABC de base \overline{AC} , se traza la ceviana interior AM, tal que $AM = AC$.

Calcule la diferencia del mayor y menor entero de $m\angle AMC$.

- A) 27° B) 29° C) 28°
D) 30° E) 31°

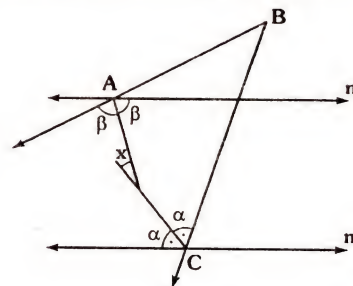
PROBLEMA N° 213

En el triángulo ABC (recto en B), exteriormente se traza el triángulo equilátero BCD, se ubica M en \overline{AC} tal que $\overline{MD} \cap \overline{BC} = \{N\}$, si $MC = DC$ y $m\angle BAC = m\angle BNM$. Calcule $m\angle BAC$

- A) 60° B) 70° C) 80°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA N° 214

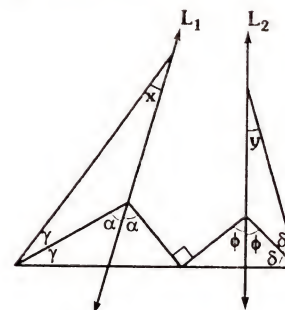
En el gráfico $\overline{m} \parallel \overline{n}$ y $\angle ABC$ es agudo. Calcule el mayor valor entero de x .



- A) 30° B) 44° C) 46°
D) 59° E) 61°

PROBLEMA N° 215

En el gráfico, la medida del ángulo entre $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$ es θ . Calcule $x + y$



- A) θ B) $\frac{3}{2}\theta$ C) 2θ
D) 3θ E) $\frac{5}{2}\theta$

PROBLEMA N° 216

En el triángulo acutángulo ABC se ubica L exterior y relativo a \overline{BC} tal que:

$$m\angle BAL = 2(m\angle LAC) \quad ;$$

$$m\angle BCE = 3(m\angle LCE)$$

E se encuentra en la prolongación de \overline{AC} . Calcule el mayor valor entero de $m\angle ALC$

- A) 31° B) 44° C) 46°
D) 29° E) 14°

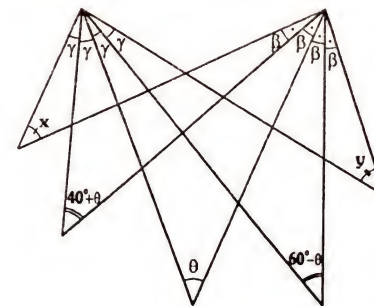
PROBLEMA N° 217

En el triángulo ABC ($AB = BC$), la bisectriz interior y exterior trazadas desde A y C respectivamente, las cuales se cortan en E. Si $AB = 8$, calcule la suma entre el mayor y menor entero de AE.

- A) 20 B) 16 C) 27
D) 24 E) 25

PROBLEMA N° 218

Del gráfico, calcule $x + y$.



- A) 60° B) 40° C) 50°
D) 30° E) 100°

PROBLEMA N° 219

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AP y CQ tal que $AP = AC$; $AQ = QC = BC$ y $m\angle BAP = \frac{3}{2}m\angle PAC$.

Calcule $m\angle QAC$.

- A) 32° B) 34° C) 36°
D) 180°/7 E) 225°/7

PROBLEMA N° 220

En el triángulo ABC se traza las cevianas interiores BP y CQ, tal que

$$m\angle AQP = m\angle BQC;$$

$$m\angle QPA = m\angle BPC;$$

$$4(m\angle ABP) = 3(m\angle BCQ) \quad y$$

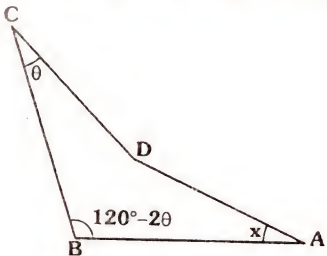
$$4(m\angle QCA) = 3(m\angle CBP)$$

Calcule $m\angle BAC$

- A) 20° B) 40° C) 30°
D) 35° E) 25°

PROBLEMA N° 221

En el gráfico, $AB = AD = BC$ calcule x.



- A) 0 B) 20 C) 60° - θ
D) 30° + θ E) 30° - θ

PROBLEMA N° 222

En el triángulo ABC, se ubica P en \overline{AC} , R en \overline{CP} y Q en \overline{BC} .

Si: $AB = BP = PQ = QR = RC$ y $m\angle ACB$ es el mayor valor entero par, calcule $m\angle ABP$.

- A) 4° B) 2° C) 6°
D) 3° E) 5°

PROBLEMA N° 223

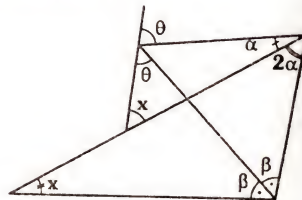
En el triángulo ABC (obtusó en B) se cumple que $(AB)^2 + (BC)^2 = 100$, se traza el triángulo equilátero AEC, calcule la diferencia de perímetros enteros máximo y mínimo de AEC.

- A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 7

PROBLEMA N° 224

Del gráfico, calcule x.

- A) 30° B) 36°
C) 34° D) 60°
E) 44°



PROBLEMA N° 225

En los lados AC y BC del triángulo ABC se ubican M y N tal que $NC = AM = AB$, si $m\angle ABC = 80^\circ$ y $m\angle BCA = 40^\circ$. Calcule $m\angle NMC$

- A) 80° B) 110° C) 120°
D) 130° E) 170°

PROBLEMA N° 226

En la región exterior relativa a \overline{AB} del triángulo ABC se ubica, tal que:

$$AD = AB; \quad AC = 3 + BD \quad y$$

$$m\angle ABC = 2(m\angle ACB) = 2(m\angle BAD)$$

Calcule $m\angle ACB$.

- A) 30° B) 45° C) 72°
D) 48° E) 34°

PROBLEMA N° 227

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BD, tal que $m\angle BAD = 40^\circ$; $CD = AB + BD$ y $m\angle DCB = 3(m\angle BCA)$. Calcule $m\angle BCA$

- A) 18° B) 20° C) 22°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA N° 228

En el triángulo ABC en la región exterior relativa a \overline{BC} se ubica, tal que:

$$AB = AP = BC; \quad m\angle ACB = 16^\circ \quad y$$

$$m\angle ABC = 28^\circ$$

Calcule $m\angle APC$

- A) 14° B) 15° C) 16°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA N° 229

En un triángulo ABC se ubica D y P en la región exterior relativo a \overline{BC} tal que \overline{CP} y \overline{AP} son bisectrices de los ángulos DCE y DAC respectivamente en la prolongación de \overline{AC} . Si $BC = BD$ y $m\angle ABC = 30^\circ$. Calcule $m\angle APC$.

- A) 5° B) 10° C) 7,5°
D) 12,5° E) 30°

PROBLEMA N° 230

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BM tal que: $AM = BC$; $m\angle BAC = 2(m\angle ACB) = 2\alpha$ y $m\angle ABM = 90^\circ + \alpha$.

Calcule α .

- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 18° E) 36°

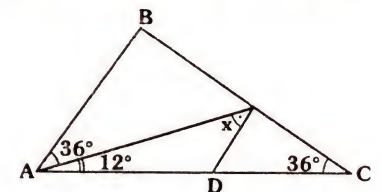
PROBLEMA N° 231

En el interior del triángulo ABC se ubica P, tal que $PB = PC$; $m\angle PCA = 30^\circ$ y $m\angle PAC = 40^\circ$, la prolongación de \overline{BP} interseca a \overline{AC} en el punto T tal que $AP = TC$. Calcule $m\angle PCB$.

- A) 10° B) 12° C) 25°
D) 18° E) 30°

PROBLEMA N° 232

En el gráfico $AB = AD$. Calcule x.



- A) 18° B) 24° C) 30°
D) 38° E) 36°

PROBLEMA N° 233

En el triángulo ABC, las bisectrices del ángulo exterior de vértice C y del ángulo exterior de vértice A se cortan en P. Si las bisectrices de los ángulos ABC y APC se cortan en Q, tal que:

$$\overline{QB} \cap \overline{AC} = \{R\} \quad y \quad m\angle QBP = 2(m\angle BRA)$$

Calcule $m\angle BRA$.

- A) 18° B) 27° C) 45°
D) 36° E) 24°

PROBLEMA N° 234

En el triángulo ABC se traza la bisectriz exterior BD ($AB > BC$) y en la prolongación de \overline{BA} se ubica el punto L. Si $m\angle BDC = 40^\circ$, calcule:

$$m\angle LAC + m\angle ACB$$

- A) 200° B) 240° C) 260°
D) 220° E) 225°

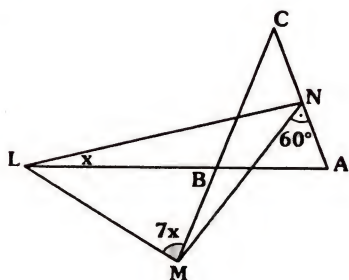
PROBLEMA N° 235

En el triángulo ABC se trazan la ceviana interior BE y la bisectriz interior CD, las cuales se cortan en F. Si $AB = AE$ y $m\angle ABC = m\angle BFC$, calcule $m\angle EFC$

- A) 45° B) 90° C) 75°
D) 60° E) 72°

PROBLEMA N° 236

En el gráfico, $AC = BC$ y $MN = ML$, calcule x.

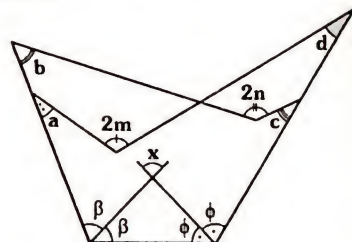


- A) 8° B) 12° C) 14°
D) 10° E) 16°

PROBLEMA N° 237

En el gráfico, $a + b + c + d = 160^\circ$ y $m + n = 160^\circ$

Calcule x.



- A) 40° B) 50° C) 70°
D) 80° E) 90°

PROBLEMA N° 238

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AN y la altura BH del triángulo ABN, tal que:

$$NC > BN ; m\angle ABC = 120^\circ ;$$

$$m\angle HBN = \alpha \text{ y } m\angle NAC = \alpha - 30^\circ$$

Calcule el menor valor entero de α .

- A) 20° B) 19° C) 18°
D) 31° E) 35°

PROBLEMA N° 239

En el triángulo equilátero ABC en la región exterior relativa a \overline{AB} se ubica D tal que:

$$m\angle ADC = 30^\circ \text{ y } m\angle DCB = 50^\circ$$

Calcule $m\angle DBA$

- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 15° E) 18°

PROBLEMA N° 240

En un triángulo ABC, se ubican D y E en \overline{AC} y en la prolongación de \overline{AB} respecti-

vamente.

$$\text{Si } BE = BC = DC ; m\angle ACB = 10^\circ \text{ y } m\angle BAC = 50^\circ$$

Calcule $m\angle AED$.

- A) 8° B) 9° C) 10°
D) 5° E) 15°

PROBLEMA N° 241

Dado el triángulo ABC, en la región exterior relativos a los lados AC y BC se ubican los puntos N y Q respectivamente, tal que N, C y Q son colineales.

$$\text{Si : } m\angle BAQ = m\angle QAC ;$$

$$m\angle ACN = 3(m\angle BCQ) \text{ y}$$

$$2(m\angle BCQ) + m\angle ABC = 100^\circ$$

Calcule $m\angle AQN$.

- A) 25° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 80°

PROBLEMA N° 242

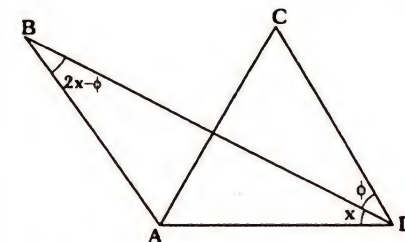
En el triángulo isósceles ABC de base AC, se traza la ceviana interior BM y en el triángulo MBC la bisectriz interior BN. Calcule la razón entre la medida del ángulo ABM con la medida del menor ángulo entre \overline{AC} y una recta perpendicular a \overline{BN} .

- A) 1 B) 2 C) 3
D) $3/2$ E) $4/3$

PROBLEMA N° 243

En el gráfico: $AB = AC = CD$

Calcule x.



- A) 30° B) 45° C) 36°
D) 18° E) $22,5^\circ$

PROBLEMA N° 244

Dado el triángulo ABC, en \overline{AB} y \overline{BC} se ubican los puntos E y D respectivamente.

$$\text{Si } m\angle ABC = 30^\circ \text{ y}$$

$$m\angle BAD = m\angle BCE = m\angle DAC + m\angle ECA$$

Calcule la medida del ángulo determinado por las bisectrices de los ángulos AEC y ADC.

- A) 25° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA N° 245

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AD y BE tal que $AB = BE$; $AD = DC$: $m\angle DAC = m\angle ABE = \phi$ y $m\angle EBC = 6\phi - 120^\circ$. Calcule la medida del ángulo entre \overline{BE} y \overline{AD} .

- A) 103° B) 104° C) 105°
D) 106° E) 107°

PROBLEMA N° 246

En el interior del triángulo ABC se ubica el punto D, de modo que $AD = DC = BC$.

$$\text{Si } m\angle BAD = 3x ; m\angle DCB = 8x \text{ y}$$

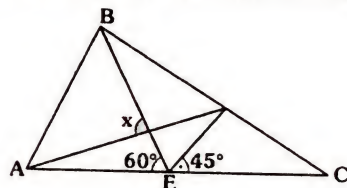
$$m\angle DCA = 45^\circ - 5x$$

Calcule x.

- A) 5° B) 6° C) $7,5^\circ$
D) 8° E) 10°

PROBLEMA N° 247

En el gráfico, $AB = BE = EC$, calcule x .



- A) 90° B) $82,5^\circ$ C) 75°
D) $67,5^\circ$ E) $97,5^\circ$

PROBLEMA N° 248

En el triángulo ABC ($AC = CB$) se ubica P en la región interior tal que:

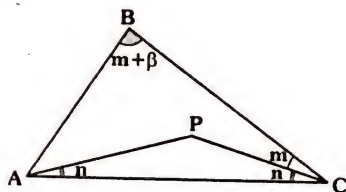
$$m\angle BAP = 30^\circ, \quad m\angle PAC = 20^\circ \quad \text{y} \\ m\angle PBC = \theta$$

Calcule $m\angle PCB$

- A) $30^\circ - \theta$ B) θ C) $\theta/2$
D) $30^\circ + \theta$ E) $45^\circ - 2\theta$

PROBLEMA N° 249

En el gráfico, $AB = PC$ y $\beta = 2(m + n)$. Calcule β .



- A) 45° B) 60° C) 90°
D) 75° E) 30°

PROBLEMA N° 250

En el exterior de un triángulo ABC y relativo a \overline{BC} se ubica P , tal que $AB = BC = AP = BP$, si $m\angle PAC = 12^\circ$. Calcule $m\angle APC$.

- A) 16° B) 18° C) 15°
D) 20° E) $22,5^\circ$

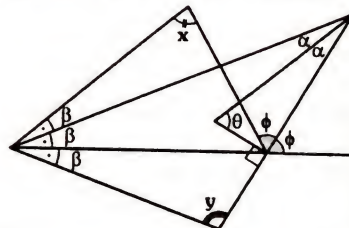
PROBLEMA N° 251

En el triángulo AFD se trazan las cevianas interiores AC y DB secantes en S . Si $AB = BC = CD$ y $m\angle ASD = 3(m\angle AFC)$. Calcule $m\angle AFC$.

- A) 36° B) 30° C) 60°
D) 45° E) 72°

PROBLEMA N° 252

En el gráfico, $\beta + \theta = 110^\circ$. Calcule $x + y$.



- A) 120° B) 110° C) 135°
D) 125° E) 140°

PROBLEMA N° 253

En el triángulo isósceles ABC de base AC se trazan las cevianas interiores AM y CN , las cuales se cortan en R y en la región exterior relativa a \overline{AC} se ubica Q , tal que:

$$m\angle MRC = m\angle BAC \quad ; \\ m\angle ANQ = 2(m\angle AMQ) \quad \text{y} \\ m\angle QMC = 2(m\angle QNC)$$

Calcule $m\angle NQM$.

- A) 36° B) 45° C) 60°
D) 54° E) 72°

PROBLEMA N° 254

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BE , tal que $m\angle BAC = 4^\circ$; $AB < FC$ y $BC = FC$, calcule el valor entero de $2(m\angle ABF)$.

- A) 188° B) 186° C) 169°
D) 184° E) 189°

PROBLEMA N° 255

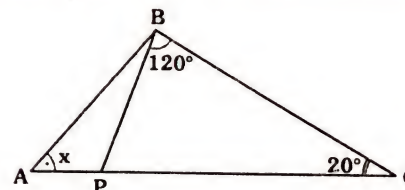
En el triángulo ABC se ubica en la región interior P , si $BP = AC$; $m\angle ACP = 18^\circ$; $m\angle PAC = 48^\circ$ y $m\angle APB = 120^\circ$.

Calcule $m\angle PBC$.

- A) 12° B) 18° C) 20°
D) 24° E) 30°

PROBLEMA N° 256

En el gráfico, $AC = PB + BC$, calcule x .



- A) 10° B) 30° C) 30°
D) 25° E) 35°

PROBLEMA N° 257

En el triángulo ABC , en la prolongación de \overline{AC} se ubica Q , a partir del cual se

traza una recta que corta a \overline{BC} en E y a \overline{AB} en D . Si $AQ = AB = QD$ y $m\angle BCQ = 134^\circ$. Calcule el mayor valor entero $m\angle ABC$.

- A) 65° B) 41° C) 43°
D) 45° E) 46°

PROBLEMA N° 258

Se tiene un triángulo rectángulo isósceles ABC , su base es \overline{AC} , se ubica P en la región interior tal que:

$$\frac{m\angle PBC}{3} = \frac{m\angle BAP}{2} = m\angle PCA$$

Calcule $m\angle ACP$

- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA N° 259

En el triángulo rectángulo (recto B), se ubica P y Q en \overline{AB} y \overline{BC} respectivamente. Si $AP = PQ$; $m\angle BAC = 40^\circ$ y $m\angle PQB = 70^\circ$. Calcule $m\angle PCB$

- A) 15° B) 20° C) 225°
D) 30° E) 25°

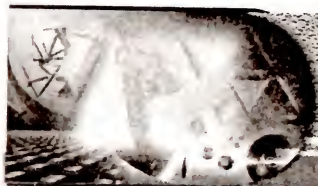
PROBLEMA N° 260

En el triángulo sus lados miden a , b y c ; y el semiperímetro de la región triangular es p . Calcule el máximo:

$$(p - a)(p - b)(p - c)$$

- A) p^3 B) $\frac{p^3}{27}$ C) $3p^3$

- D) $\frac{p^3}{3}$ E) $2p^3$

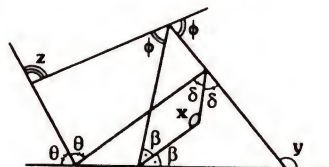


Problemas Propuestos

Ciclo Repaso

PROBLEMA N° 261

Del gráfico, calcule $x + y + z$.



- A) 180° B) 270° C) 240°
D) 260° E) 360°

PROBLEMA N° 262

Se tiene el triángulo isósceles ABC de base AC, se ubican los puntos E y D en la prolongación de AC y en la región exterior relativa a AC respectivamente. Si $DB = BC$ y

$$m\angle BAC + m\angle ECB = 12(m\angle ABD)$$

Calcule $m\angle ACD$.

- A) 15° B) 16° C) 30°
D) 20° E) $7,5^\circ$

PROBLEMA N° 263

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Un triángulo equilátero es un triángulo acutángulo.
- II. En todo triángulo, la longitud de cualquier lado es menor que el semiperímetro.

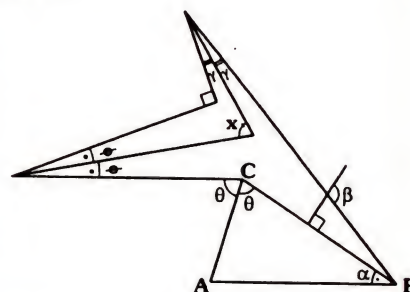
III. Existe un sólo triángulo obtusángulo cuyos lados tienen longitudes enteras consecutivas.

IV. La base de un triángulo isósceles siempre es mayor que un lado lateral.

- A) VFFV B) VFVF C) VVVV
D) VVVF E) FFVV

PROBLEMA N° 264

En el gráfico, $AB = BC$ y $\alpha + \beta = 130^\circ$, calcule x .



- A) 65° B) 75° C) 85°
D) 50° E) 70°

PROBLEMA N° 265

En el triángulo APQ en las prolongaciones de AP, AQ, PQ y CB se ubican los puntos B, C, S y L respectivamente de modo que:

$$PB + PQ = 10 \text{ y}$$

$$m\angle CQS = m\angle LBA + m\angle LCA$$

Calcule el menor valor entero de QC.

- A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

PROBLEMA N° 266

En el triángulo ABC se traza la ceviana exterior BE (E en la prolongación de CA).

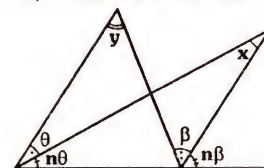
$$\text{Si } AE = AB + BC \text{ y } m\angle BAC = 2(m\angle BCA)$$

Calcule la razón de las medidas de los ángulos BEA y EBA.

- A) 1 B) $1/3$ C) $1/2$
D) $1/4$ E) $1/5$

PROBLEMA N° 267

Del gráfico, calcule x en función de n e y .



- A) $\frac{y}{n}$ B) $\frac{y}{n+1}$ C) $\frac{ny}{n+1}$
D) $\frac{y}{2n-1}$ E) $\frac{y}{2n}$

RESOLUCIÓN N° 268

En el triángulo ABC, se cumple que $AB = 6$, $BC = 8$ y

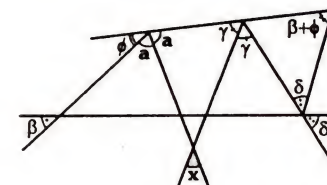
$$m\angle BAC + m\angle BCA < 90^\circ$$

Calcule el valor entero par de AC.

- A) 8 B) 10 C) 12
D) 14 E) 6

PROBLEMA N° 269

Del gráfico, calcule x .



- A) 50° B) 60° C) 30°
D) 75° E) 45°

PROBLEMA N° 270

En el triángulo acutángulo ABC, se cumple $m\angle ABC = 4x$ y $m\angle BAC = 2x + 38^\circ$. Si x toma su mayor valor entero. Calcule $m\angle BCA$

- A) 22° B) 15° C) 10°
D) 18° E) 16°

PROBLEMA N° 271

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y CN secantes en P, si $AP = 3$, $AC = 12$ y PC toma su mayor valor entero. Calcule el menor valor entero de $AB + BC$.

- A) 14 B) 12 C) 15
D) 16 E) 18

PROBLEMA N° 272

Dado el triángulo ABC, se ubican los puntos P y Q en BC y AC respectivamente. Si $AB = BQ$ y $PC = QC$, si los ángulos ABQ y PCQ son complementarios. Calcule $m\angle BQP$.

- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA N° 273

En el triángulo ABC, se trazan las cevianas interiores BD y BE (E en \overline{CD}), tal que $DB=DA$; $EB=EC$ y $m\angle DBE = 20^\circ$. Calcule la medida de ángulo entre las bisectrices de los ángulos BAC y BCA.

- A) 140° B) 150° C) 160°
D) 120° E) 170°

PROBLEMA N° 274

En un triángulo ABC ($AB=BC$), se ubica E y D en \overline{AB} y \overline{BC} respectivamente, si $AC=CE=ED=BD$. Calcule $\frac{m\angle ABC}{m\angle ACE}$.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

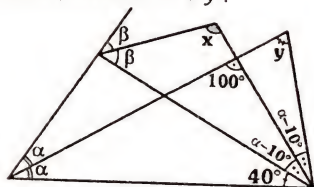
PROBLEMA N° 275

Se tiene un ángulo BAD, se ubica en la región interior el punto C, si $m\angle BAD = 80^\circ$; $m\angle ADC = 60^\circ$; $BC=CD$ y $AD=AB+CD$. Calcule $m\angle BCD$.

- A) 100° B) 110° C) 120°
D) 140° E) 130°

PROBLEMA N° 276

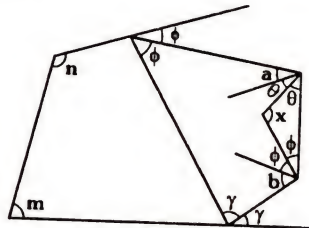
Del gráfico, calcule $x+y$.



- A) 200° B) 205° C) 210°
D) 220° E) 215°

PROBLEMA N° 277

En el gráfico $m+n=260^\circ$ y $a+b=120^\circ$. Calcule x.



- A) 105° B) 95° C) 115°
D) 125° E) 135°

PROBLEMA N° 278

Se tiene el triángulo ABC en el cual se traza la bisectriz interior BJ en cuya prolongación se ubica E, en la región exterior relativa a \overline{BC} se ubica D, tal que ED corta a \overline{AC} y \overline{BC} en N e I respectivamente.

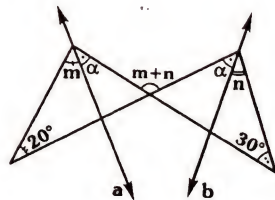
Si: $m\angle CBD = m\angle ABJ$ y $m\angle BDI = m\angle ACB$

Calcule $m\angle AJB + m\angle BID$.

- A) 90° B) 120° C) 180°
D) 150° E) 270°

PROBLEMA N° 279

Del gráfico, calcule la medida del ángulo entre \overline{a} y \overline{b} .



- A) 50° B) 40° C) 25°
D) 70° E) 60°

PROBLEMA N° 280

En el triángulo equilátero ABC, se ubica P en la región exterior relativa a \overline{BC} de modo que:

$$AP=AC \text{ y } m\angle BCP = 2(m\angle PBC)$$

Calcule $m\angle PBC$.

- A) 5° B) 10° C) 12°
D) 15° E) 18°

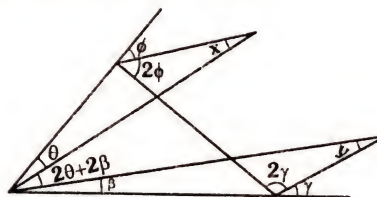
PROBLEMA N° 281

En la región exterior relativa a \overline{AC} del triángulo ABC, se ubica D, tal que $AB=BD=DC$ y $m\angle ABD = 2(m\angle ACD)$. Calcule $m\angle CAD$.

- A) 20° B) 10° C) 30°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA N° 282

Del gráfico, calcule $x+y$.



- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 50° E) 70°

PROBLEMA N° 283

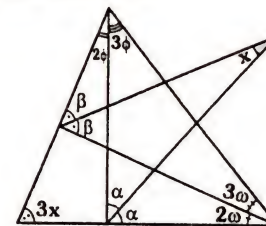
Sean \overline{AM} y \overline{BN} cevianas interiores del triángulo ABC, tal que $AB=BN$ y $AM=MC$. Si $\overline{BN} \cap \overline{AM} = \{L\}$.

Calcule $m\angle ABC + m\angle MLN$

- A) 90° B) 180° C) 240°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA N° 284

Del gráfico calcule x.



- A) 15° B) 30° C) $22^\circ 30'$
D) $32^\circ 30'$ E) $37^\circ 30'$

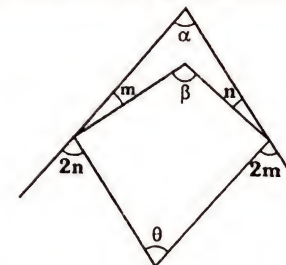
PROBLEMA N° 285

En un triángulo ABC se cumple $BC=AB+k(k \in \mathbb{R}^+)$ y $m\angle ABC = 111^\circ$, calcule el mayor valor entero del menor ángulo interior del triángulo.

- A) 31° B) 29° C) 33°
D) 34° E) 36°

PROBLEMA N° 286

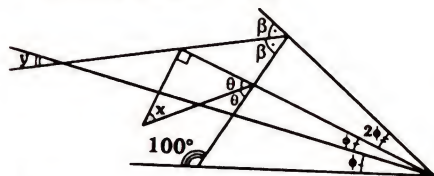
Del gráfico, indique la relación correcta:



- A) $2\beta = 3\alpha - \theta$ B) $2\beta = \alpha + \theta$
C) $2\beta = 3\alpha + \theta$ D) $\beta = 2\alpha - \theta$
E) $3\beta = 4\alpha - \theta$

PROBLEMA N° 287

Del gráfico, calcule $x - y$.



- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

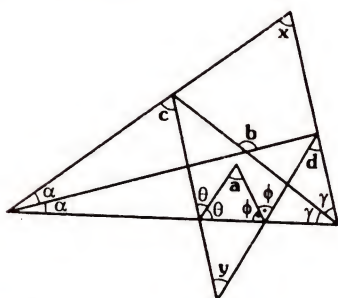
PROBLEMA N° 288

Se tiene el triángulo ABC, se ubica M y N en \overline{AC} y \overline{BC} respectivamente. La suma de las medidas de los ángulos exteriores en A y B es 220° . Si \overline{MN} corta a la bisectriz exterior trazada desde C en T y $CN = NM$. Calcule $m\angle CTN$.

- A) 30° B) 40° C) 50°
D) 70° E) 80°

PROBLEMA N° 289

En el gráfico, $a + b = 220^\circ$ y $c + d = 140^\circ$, calcule "x" e "y".



- A) 110° y 30° B) 120° y 20°
C) 100° y 40° D) 70° y 70°
E) 90° y 50°

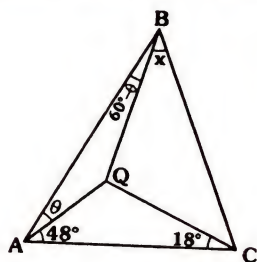
PROBLEMA N° 290

En un triángulo rectángulo ABC (recto en B) se traza la altura \overline{BH} y las bisectrices interiores CD y AE cortan a \overline{BH} en Q y P. Si $BD = a$ y $BE = b$, calcule PQ (considere $b > a$)

- A) $a - \frac{b}{2}$ B) $b - a$ C) $\sqrt{b^2 - a^2}$
D) \sqrt{ab} E) $2b - a$

PROBLEMA N° 291

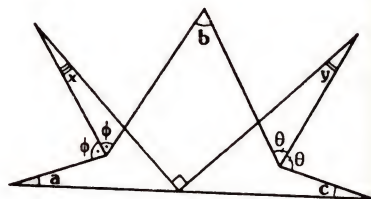
En el gráfico, $BQ = AC$, calcule x.



- A) 30° B) 24° C) 26°
D) 36° E) 34°

PROBLEMA N° 292

Del gráfico, calcule $x + y$ en función de a, b y c.

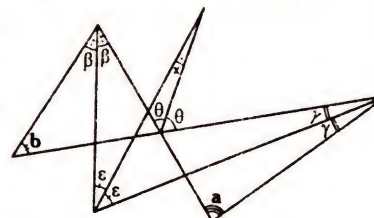


- A) $\frac{a+b+c}{2}$ B) $\frac{b-a-c}{2}$
C) $a+b+c$ D) $a+b-c$
E) $a-c-b$

PROBLEMA N° 293

Del gráfico, $a - b = 40^\circ$. Calcule x.

- A) 10°
B) 8°
C) 20°
D) 40°
E) 25°

**PROBLEMA N° 294**

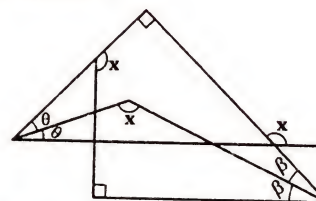
En un triángulo rectángulo ABC se traza la altura BH y la ceviana interior AE secantes en M. Si $BE = BM$, ¿Qué línea notable es \overline{AE} para el triángulo BAC?

- A) Mediana B) Bisectriz interior
C) Altura D) Simediana
E) Cualquier ceviana

PROBLEMA N° 295

Del gráfico, calcule x.

- A) 120°
B) 150°
C) 130°
D) 105°
E) 135°

**PROBLEMA N° 296**

En el triángulo ABC se cumple $m\angle ABC = 115^\circ$ y $m\angle ACB = 45^\circ$. Se ubica P en \overline{AC} y Q en \overline{BC} tal que:

$$m\angle PBC = 65^\circ \text{ y } m\angle QPC = 35^\circ$$

Calcule $m\angle AQP$.

- A) 15° B) 20° C) 25°
D) 35° E) 30°

PROBLEMA N° 297

En el triángulo ABC, se trazan las bisectrices interiores AN y CM, tal que:

$$m\angle BMN = m\angle CMA \text{ y}$$

$$m\angle MNB = m\angle ANC$$

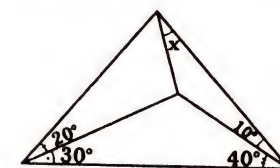
Calcule $m\angle ABC$.

- A) 60° B) 75° C) 80°
D) 36° E) 48°

PROBLEMA N° 298

Del gráfico, calcule x.

- A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 15°
E) 25°

**PROBLEMA N° 299**

En el triángulo ABC ($AB = BC$), se trazan las cevianas interiores \overline{AD} y \overline{BE} , las cuales se cortan en F. Si $m\angle ABF = 20^\circ$ y $BF = BD$. Calcule $m\angle DAC$.

- A) 5° B) 10° C) 20°
D) 30° E) 40°

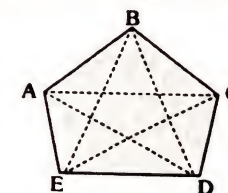
PROBLEMA N° 300

En el gráfico, el perímetro de la región sombreada es 20cm si:

$$AC = BD = AD = EC = EB$$

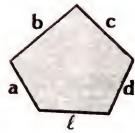
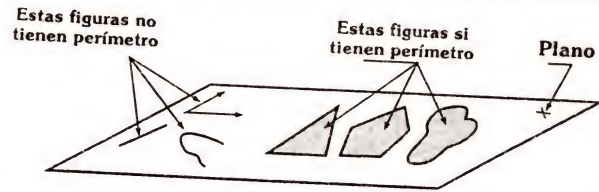
Calcule el mayor valor entero de AC.

- A) 3cm
B) 4cm
C) 5cm
D) 6cm
E) 7cm



ACERCA DEL PERÍMETRO

Se llama perímetro a la longitud del contorno o frontera de una región plana cerrada



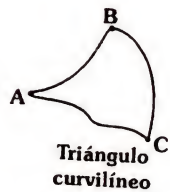
Cuando la región plana y cerrada es poligonal, su perímetro es la suma de las longitudes de sus lados.

$$\text{Perim.}_{\square} = a + b + c + d + l$$

OTROS TRIÁNGULOS

Un triángulo en general, se define como la figura formada al unir tres puntos no colineales unidas mediante líneas, las cuales sólo se intersectan en los puntos mencionados.

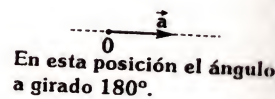
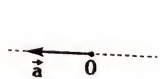
Así tenemos:



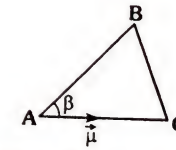
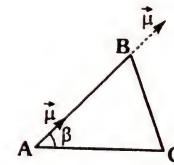
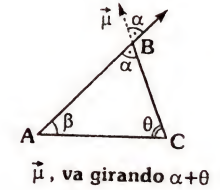
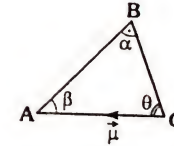
OTRA PRUEBA DEL TEOREMA 1

Se puede partir así:

Sea el vector "a": \vec{a}



Dado el triángulo ABC, asociemos el vector $\vec{\mu}$, así:



Aquí el vector ha girado $\alpha + \beta + \theta$

En consecuencia :

$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$$

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

En matemáticas la verdad está constituida como la validez de una implicancia de la forma: $H \Rightarrow T$, donde H es el conjunto de hipótesis y T es la conclusión a la cual se debe llegar. Esta implicancia está regida por el principio filosófico "de la verdad no puede seguir la falsedad". Este principio constituye la fundamentación del método de demostración denominado "directo".

Si ahora consideramos dos teoremas para los cuales la tesis de uno de ellos es la hipótesis del otro y viceversa; se les llama a ellos **TEOREMAS RECÍPROCOS**. La certeza de un teorema no implica la certeza de su recíproco.

Dos teoremas se llaman contrarios cuando la hipótesis y la tesis del uno son las negaciones respectivas de la hipótesis y la tesis del otro. La certeza de un teorema no implica la del contrario.

Dos teoremas se llaman contrarrecíprocos cuando cada uno de ellos es el contrario del recíproco (o recíproco del contrario) del otro.

Es muy frecuente en matemáticas demostrar un teorema probando su contrarrecíproco. Este método de demostración se llama demostración por reducción al absurdo.

Método de inducción matemática.

Se denomina inducción a todo razonamiento que comprende el paso de proposiciones particulares a generales con la particularidad de que la validez de las últimas se deduce de la validez de las primeras.

El principio de inducción matemática establece que para un subconjunto de enteros positivos S ($S \subset \mathbb{N}$) tal que:

a) El número 1 pertenece a S ($1 \in S$)

b) $m \in S \Rightarrow m+1 \in S$

entonces S coincide con todo el conjunto de los enteros positivos, es decir: " $S = \mathbb{N}$ "

A la hipótesis $m \in S$, se le conoce con el nombre de hipótesis inductiva.

DESIGUALDADES ENTRE MEDIAS

Si $0 < a \leq b$, entonces:

$$a \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq b$$

la igual es válida si sólo $a=b$

Generalizando para el conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de números positivos se verifica

$$\min(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{a_i}\right)} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_i)^2}{n}} \leq \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Donde:

- La media armónica: $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$

- La media geométrica: $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$

- La media aritmética: $M = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

- La media cuadrática: $R = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$

Así como el método de inducción, los teoremas sobre desigualdades también son utilizados en geometría.

CLAVES DE RESPUESTAS

ANUAL

1. A	10. D	19. B	28. B	37. C	46. C	55. A
2. D	11. C	20. C	29. D	38. D	47. C	56. D
3. D	12. E	21. A	30. B	39. E	48. B	57. B
4. E	13. E	22. C	31. C	40. C	49. B	58. A
5. C	14. C	23. B	32. C	41. B	50. C	59. B
6. A	15. C	24. B	33. B	42. D	51. B	60. B
7. C	16. C	25. E	34. A	43. D	52. B	
8. C	17. C	26. A	35. C	44. B	53. A	
9. E	18. C	27. C	36. D	45. B	54. A	

CEPRE-UNI

61. E	71. B	81. D	91. E	101. E	111. D	121. D	131. A
62. E	72. E	82. B	92. C	102. B	112. D	122. D	132. D
63. C	73. B	83. D	93. A	103. A	113. C	123. B	133. A
64. A	74. D	84. E	94. D	104. C	114. A	124. B	134. C
65. D	75. C	85. A	95. D	105. B	115. B	125. A	135. D
66. B	76. B	86. C	96. B	106. D	116. B	126. C	136. B
67. E	77. B	87. C	97. C	107. C	117. D	127. A	137. *
68. D	78. D	88. E	98. C	108. B	118. C	128. D	138. *
69. C	79. E	89. A	99. B	109. C	119. D	129. A	139. *
70. E	80. E	90. E	100. B	110. B	120. A	130. C	140. *

SEMESTRAL

141. C	150. D	159. B	168. C	177. E	185. C	193. C
142. B	151. B	160. C	169. A	178. E	186. B	194. B
143. A	152. D	161. A	170. B	179. C	187. A	195. A
144. E	153. D	162. B	171. A	180. D	188. D	196. C
145. A	154. D	163. D	172. A	181. C	189. E	197. A
146. C	155. C	164. C	173. A	182. C	190. E	198. D
147. D	156. C	165. A	174. C	183. C	191. B	199. A
148. B	157. B	166. C	175. C	184. C	192. C	200. C
149. D	158. E	167. E	176. E			

* Son preguntas para demostrar

SEMESTRAL INTENSIVO

201. C	210. C	219. E	228. A	237. B	246. C	255. D
202. B	211. D	220. B	229. C	238. D	247. C	256. C
203. A	212. B	221. B	230. B	239. B	248. A	257. A
204. B	213. B	222. A	231. C	240. D	249. B	258. C
205. C	214. C	223. E	232. C	241. C	250. B	259. D
206. D	215. D	224. B	233. C	242. B	251. A	260. B
207. B	216. D	225. B	234. C	243. A	252. E	
208. D	217. D	226. A	235. D	244. D	253. C	
209. B	218. E	227. E	236. B	245. B	254. C	

REPASO

261. E	267. C	273. A	279. C	285. D	291. B	297. D
262. C	268. C	274. A	280. B	286. C	292. B	298. B
263. D	269. E	275. A	281. C	287. A	293. A	299. B
264. A	270. C	276. B	282. C	288. A	294. B	300. E
265. C	271. E	277. D	283. B	289. A	295. E	
266. E	272. B	278. C	284. C	290. B	296. C	

Biblioteca

- Pedro Puig Adam (1961)** Curso de Geometría Métrica. Séptima edición
Nuevas gráficas S.A- Madrid
- Rey Pastor J. (1931)** Elementos de Geometría- Colección Elemental
Intuitiva-Madrid.
- Yaglom I.M- Golovina L.9 (1976)** Inducción en la Geometría. Editorial MIR- Moscú
- Ediciones Bruño (1967)** Geometría Curso Superior- 14va Edición
- Lages Elon (2000)** La matemática de la enseñanza media- volumen 2
Instituto de Matemática y Ciencias Afines IMCA - Perú
- Nicholas Kazarinoff (1961)** Geometric Inequalities- Ramdon House The L.W.
Singer Company- Moscú
- Jaime Escobar Acosta (1990)** Elementos de Geometría-Universidad de
Antioquía - Dpto de Matemáticas.
- Erica Parra Sánchez Miguel Valdiniesto** Análisis de algunos dobleces de origami mediante
cabri geometre - Universidad Pedagógica Nacional - Bogotá.
- CEPRE-UN9** Recopilación de seminarios, prácticas calificadas y
exámenes parciales.
- Material Bibliográfico de diferentes Instituciones
Preuniversitarias.



*Esta obra se terminó de imprimir en los
talleres gráficos de Editorial Cuzcano*

INFORMES Y VENTAS

Av. Alfonso Ugarte N°1310 OF. 212 - Breña
☎ 423-8154

TRIÁNGULOS



INFORMES

AV. ALFONSO UGARTE N°1310 OI. 212 - BREÑA
① 423-8154



Editorial Cuzcano

www.editorialcuzcano.com

MÁS RESUELTOS DE ÁLGEBRA

TOMO I

